



# Intermittence en Turbulence pleinement développée et en Dynamique non linéaire

Aurore Naso

## ► To cite this version:

Aurore Naso. Intermittence en Turbulence pleinement développée et en Dynamique non linéaire. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Nice Sophia Antipolis, 2005. Français. NNT : . tel-00011134

**HAL Id: tel-00011134**

**<https://theses.hal.science/tel-00011134>**

Submitted on 30 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS  
FACULTÉ DES SCIENCES  
INSTITUT NON LINÉAIRE DE NICE  
École Doctorale  
Sciences Fondamentales et Appliquées

## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

**Spécialité : Physique**

par

Aurore NASO

# Intermittence en Turbulence pleinement développée et en Dynamique non linéaire

Soutenue le 4 novembre 2005 à 15h

### Jury

M. Marc-Étienne BRACHET	Rapporteur
M. Hugues CHATÉ	Rapporteur
M. Jean-Louis MEUNIER	Président
M. Jean-François PINTON	Examineur
Mme. Hélène POLITANO	Examineur
M. Alain PUMIR	Directeur de Thèse

à l'INSTITUT NON LINÉAIRE DE NICE



*à ma mère, à Christophe,  
à mon père*





# REMERCIEMENTS

Cette thèse est le résultat de trois années de travail à l'Institut Non Linéaire de Nice.

Je tiens à remercier tout particulièrement Alain Pumir, qui m'a donné la chance de travailler sur le modèle du tétraèdre. Durant ces trois années, il a toujours fait preuve d'une grande disponibilité à mon égard tout en me laissant une grande liberté de travail. Travailler à ses côtés m'a permis d'apprendre les différentes facettes du métier de chercheur.

Je remercie également Marc-Étienne Brachet et Hugues Chaté pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse mais aussi, en ce qui concerne Hugues, pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur le problème de l'intermittence spatio-temporelle.

Durant cette thèse j'ai eu l'occasion de collaborer avec Jean-Louis Meunier, qui m'a beaucoup appris en physique statistique. Je le remercie pour cela, ainsi que pour avoir accepté de présider mon Jury de soutenance.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Hélène Politano et à Jean-François Pinton, qui ont accepté de faire partie de ce Jury. Hélène m'a en particulier initiée au problème de la turbulence hydrodynamique à l'occasion des cours qu'elle donne en D.E.A.

I would also like to acknowledge Misha Chertkov, who has enabled me to work a few months in the Center for NonLinear Studies. Our discussions, but also more generally my visits in Los Alamos, have been very fruitful for my work and my scientific knowledge.

Je remercie également Philippe Maïssa et Christian Mathis, avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer durant cette thèse, pour nos discussions sur l'expérience et pour m'avoir par ailleurs permis d'utiliser leurs machines de calcul.

Je suis aussi reconnaissante à toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu l'occasion de discuter des problèmes que j'ai rencontrés durant cette thèse, en particulier Lionel Gil, Jean-Pierre Provost, Alain Noullez et plus généralement de nombreux membres du GdR Turbulence.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement Christophe, sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est. Il est impossible de détailler ici toute l'aide qu'il m'a apportée pour mener à bien ce travail. Ma mère et lui ont toujours été à mes côtés dans les moments difficiles, je leur en suis à tous deux infiniment reconnaissante.



# Table des matières

<b>1. Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>I. Géométrie et statistique en turbulence hydrodynamique</b>	<b>15</b>
<b>2. Introduction</b>	<b>17</b>
<b>3. Présentation du modèle</b>	<b>21</b>
3.1. Le modèle . . . . .	21
3.1.1. Dynamique de $\rho$ . . . . .	21
3.1.2. Dynamique de $M$ . . . . .	23
3.1.3. Propriétés statistiques des bruits . . . . .	24
3.2. Équation de Fokker-Planck et bilan d'énergie . . . . .	25
3.3. Solution en terme d'intégrales de chemin . . . . .	27
3.4. Méthodes de résolution - Problématique . . . . .	29
3.5. Solutions du modèle calculées dans l'approximation déterministe . . . . .	29
<b>4. Résolution du modèle dans l'approximation semi-classique</b>	<b>31</b>
4.1. Description de la méthode employée . . . . .	31
4.1.1. Recherche de la trajectoire d'action minimale . . . . .	31
4.1.2. Méthode de résolution . . . . .	32
4.2. Tentative de résolution du modèle complet . . . . .	34
4.3. Une version simplifiée du modèle . . . . .	35
4.3.1. Définition . . . . .	35
4.3.2. Paramètres de l'algorithme d'optimisation . . . . .	37
4.4. Solutions semi-classiques de la version simplifiée du modèle . . . . .	38
4.4.1. Lois d'échelles . . . . .	38
4.4.1.1. Dépendance en fonction de $\alpha$ . . . . .	38
4.4.1.2. Dépendance en fonction de $\beta$ . . . . .	39
4.4.1.3. Dépendance en fonction de $\gamma$ . . . . .	39
4.4.2. Fonction distribution de probabilité dans le plan $(R, Q)$ . . . . .	45
4.4.3. Densités de quantités dynamiques dans le plan $(R, Q)$ . . . . .	45
4.4.4. Discussion . . . . .	48

4.5. Conclusion . . . . .	51
<b>5. Résolution du modèle par un schéma de type Monte-Carlo</b>	<b>53</b>
5.1. Description et justification de la méthode . . . . .	53
5.2. Résultats . . . . .	55
5.2.1. Fonction distribution de probabilité dans le plan $(R, Q)$ . . . .	56
5.2.2. Densités de quantités dynamiques dans le plan $(R, Q)$ . . . .	56
5.2.3. Lois d'échelles . . . . .	59
5.2.3.1. Dépendance en fonction de $\alpha$ . . . . .	59
5.2.3.2. Dépendance en fonction de $\beta$ . . . . .	59
5.2.3.3. Dépendance en fonction de $\gamma$ . . . . .	62
5.3. Conclusion . . . . .	63
<b>6. Application à la turbulence sous cisaillement</b>	<b>65</b>
6.1. Introduction . . . . .	65
6.2. Méthode d'étude . . . . .	67
6.3. Résultats . . . . .	69
6.3.1. Lois d'échelles . . . . .	70
6.3.2. Fonction distribution de probabilité dans le plan $(R, Q)$ . . .	70
6.3.3. Densités de quantités dynamiques dans le plan $(R, Q)$ . . . .	72
6.3.4. Discussion . . . . .	72
<b>7. Conclusion</b>	<b>81</b>
 <b>II. Intermittence spatio-temporelle dans un système bidi- mensionnel de taille finie</b>	 <b>83</b>
<b>8. Introduction</b>	<b>85</b>
<b>9. Résultats expérimentaux</b>	<b>91</b>
9.1. Dispositif expérimental et diagramme des phases du système . . . . .	91
9.1.1. Dispositif expérimental . . . . .	91
9.1.2. Diagramme des phases du système . . . . .	92
9.1.3. La transition au chaos spatio-temporel dans le régime de co- lonnes . . . . .	93
9.1.4. Les processus de créations/fusions . . . . .	97
9.2. Méthode d'étude . . . . .	97
9.3. Résultats . . . . .	98
9.3.1. Le nombre de colonnes . . . . .	99
9.3.2. La fraction d'hexa et la distribution des distances entre plus proches voisins . . . . .	102
9.3.3. Le nombre de créations/fusions . . . . .	109

9.3.3.1. Un paramètre d'ordre . . . . .	109
9.3.3.2. Caractérisation de la distribution de $N$ loin du seuil . . . . .	112
9.4. Discussion . . . . .	115
9.5. Conclusion . . . . .	116
<b>10. Modélisation</b>	<b>119</b>
10.1. Le modèle MIST . . . . .	119
10.1.1. Description du modèle . . . . .	119
10.1.2. Résultats avec conditions aux limites périodiques . . . . .	122
10.1.2.1. Rôle de $r$ . . . . .	122
10.1.2.2. Rôle de $k$ . . . . .	122
10.2. Application au système expérimental . . . . .	123
10.2.1. Méthode employée . . . . .	123
10.2.2. Résultats . . . . .	124
10.2.2.1. Conditions aux bords chaotiques . . . . .	124
10.2.2.2. Intermittence unidimensionnelle sur les bords . . . . .	128
10.2.3. Résumé - Discussion . . . . .	132
10.3. Conclusion . . . . .	134
<b>11. Conclusion</b>	<b>135</b>
 <b>III. Annexes</b>	 <b>137</b>
<b>A. Les invariants <math>Q</math> et <math>R</math> et la dynamique d'Euler Restreinte</b>	<b>139</b>
A.1. Les invariants $Q$ et $R$ . . . . .	139
A.2. La dynamique d'Euler Restreinte . . . . .	140
<b>B. Résultats de DNS</b>	<b>143</b>
<b>C. Méthodes d'optimisation</b>	<b>147</b>
C.1. La méthode de descente du simplexe . . . . .	147
C.2. Le recuit simulé . . . . .	148
C.2.1. Généralités . . . . .	148
C.2.2. Algorithme de Metropolis . . . . .	150
C.2.3. Schéma général de l'algorithme du recuit simulé . . . . .	151
C.2.4. Forces et faiblesses du recuit simulé . . . . .	151
C.3. L'algorithme « amebse » . . . . .	152
<b>D. Équations d'Euler-Lagrange</b>	<b>155</b>
D.1. Approche lagrangienne de la version complète du modèle ( $C_{\parallel} = C_{\perp}$ ) . . . . .	155
D.2. Approche hamiltonienne de la version complète du modèle . . . . .	156
D.3. Approche lagrangienne de la version simplifiée du modèle . . . . .	158

---

<b>E. Articles</b>	<b>159</b>
--------------------	------------

# 1. Introduction générale

L'équilibre global est une situation exceptionnelle en physique. La plupart des systèmes sont hors d'équilibre et évoluent spontanément pour y retourner [1]. Ceux qui sont isolés du milieu environnant ne peuvent rester loin de l'équilibre que transitoirement. Par contre, les systèmes dits ouverts, c'est-à-dire pouvant échanger de l'énergie ou de la matière avec le milieu extérieur, peuvent être maintenus hors d'équilibre sous l'effet de contraintes. Ainsi, un système peut échanger de façon permanente de la matière ou de la chaleur avec son environnement respectivement sous l'effet de gradients de pression ou de température.

De telles contraintes sont toujours négligeables devant l'interaction moléculaire : on peut donc dans tous les cas définir une échelle dite mésoscopique, pour laquelle il existe un équilibre local [1]. Elle est beaucoup plus grande que l'échelle microscopique mais très petite devant la taille macroscopique du système. Dans le cas des systèmes hydrodynamiques, auxquels cette thèse est consacrée, cette échelle mésoscopique est associée à la notion de particule de fluide. Il est important de remarquer que l'équilibre local n'empêche pas le système d'être globalement dans une situation hors d'équilibre.

La dynamique d'un fluide est gouvernée par l'équation de Navier-Stokes [2] :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\nabla} \tau + \vec{f}$$

à laquelle on associe en général la condition d'incompressibilité  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ . Dans cette équation,  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  est le champ de vitesse,  $\tau$  le tenseur des contraintes internes au fluide (regroupant les effets de pression et de viscosité),  $\vec{f}$  une force extérieure qui rassemble l'effet de toutes les contraintes (extérieures) appliquées sur le fluide (on l'appellera aussi forçage) et  $\rho$  la masse volumique du fluide. Le terme essentiel pour la dynamique est le terme non linéaire  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$  (terme d'advection). Très près de l'équilibre, il est négligeable. L'équation résultante (équation de Stokes), est alors linéaire [2]. Dans ce cas, les solutions sont uniques et possèdent les mêmes symétries spatiales et temporelles que les contraintes. Elle sont régulières, on dira aussi *laminaires*. Ces solutions se dérivent continuellement par rapport à l'état d'équilibre, on dit qu'elles appartiennent à la branche thermodynamique.

Plus loin de l'équilibre, c'est-à-dire pour des valeurs plus importantes du forçage, le terme non linéaire  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$  n'est plus négligeable. Les solutions appartenant à



---

la branche thermodynamique ne sont plus stables. Les solutions adoptées par le système appartiennent alors à une autre branche. Elles ne possèdent plus forcément les mêmes symétries spatio-temporelles que les contraintes : on dit qu'il y a eu une bifurcation [1]. Cette dernière est associée à une perte de prédictibilité, mais en général après la première bifurcation les solutions restent laminaires. Pour une valeur croissante des contraintes, le système subit d'autres transitions du même genre. Lors de chacune d'entre elles de nouvelles symétries sont brisées, l'imprédictibilité des solutions augmente. À la fin, la dynamique du système peut devenir très compliquée : on parle alors de *chaos* ou de *turbulence*.

Selon L.D. Landau, la turbulence est ainsi le résultat d'une accumulation indéfinie de modes instables [3]. D'après lui, ce nombre indéfini est nécessaire pour justifier la nature continue du spectre de fréquence des solutions. Mais ce postulat est faux. Ainsi, D. Ruelle et F. Takens ont montré en 1971 [4] qu'un nombre fini de bifurcations était suffisant pour que le chaos temporel apparaisse<sup>1</sup>.

On distingue en réalité deux types de turbulence :

- la turbulence dite pleinement développée (forte, ou hydrodynamique) [5] qualifie les systèmes où des structures (des tourbillons) de tailles très variables interagissent. Leurs échelles de longueur couvrent tout l'intervalle entre l'échelle de forçage et l'échelle de dissipation. Le phénomène le plus surprenant dans ce cas est celui d'*intermittence* : les fluctuations des champs de vitesse de l'écoulement présentent des fluctuations relatives de plus en plus intenses lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales de plus en plus petites. Ceci se traduit par le fait que les distributions de différences de vitesses entre deux points de l'écoulement séparés d'une distance  $r$ , qui sont quasi-gaussiennes à l'échelle de forçage, s'écartent de plus en plus de cette gaussiannité pour des valeurs décroissantes de  $r$
- la turbulence dite faible (ou chaos spatio-temporel) [1] concerne les systèmes où les structures en interaction ont toutes la même taille caractéristique. Dans l'état laminaire, ces structures forment en général un motif régulier. On rencontre également dans ce cas la notion d'intermittence, mais dans un sens tout autre. L'*intermittence spatio-temporelle* est en effet l'un des mécanismes possibles de transition à la turbulence faible : dans ce cas, il y a coexistence dans le système de régions laminaires et de domaines chaotiques dont la disposition est variable en espace et en temps [6]. La fraction du système occupée par l'état chaotique augmente avec l'intensité du forçage, jusqu'à ce que la totalité du système se trouve dans un régime de chaos spatio-temporel

Dans cette thèse ces deux types de turbulences, et d'intermittences, sont étudiés. Par souci de clarté on emploiera le terme turbulence uniquement pour qualifier la turbulence pleinement développée. Dans le second cas on parlera plutôt de chaos spatio-temporel.

---

<sup>1</sup>Il est cependant important de différencier l'étude du chaos temporel de celle du chaos spatio-temporel. Nous reviendrons sur ce point dans la deuxième partie de cette thèse.

La première partie de cette thèse concerne la turbulence forte. On s'intéresse en particulier à un modèle de type lagrangien, c'est-à-dire dans lequel on suit la trajectoire de particules de fluide. Ce modèle, proposé en 1999 par M. Chertkov, A. Pumir et B.I. Shraiman [7], se présente sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques. On présente les solutions de celui-ci, calculées par deux méthodes différentes, et leur accord avec des solutions de l'équation de Navier-Stokes calculées numériquement, mais aussi avec des résultats expérimentaux [8].

La deuxième partie de cette thèse est reliée au chaos spatio-temporel. Comme on le verra par la suite, une méthode possible pour essayer de comprendre la nature de ce dernier consiste à étudier les différents types de scénarios par lesquels il arrive. L'un des scénarios les plus connus est celui de l'intermittence spatio-temporelle (IST), que nous avons déjà mentionné. On étudie ici la transition au chaos spatio-temporel via IST d'un système hydrodynamique bidimensionnel réel [9]. Cette transition sera d'abord caractérisée quantitativement, puis on essaiera de comprendre certains comportements du système en appliquant à sa géométrie particulière un modèle minimal d'IST de type réseau d'itérations couplées [10].

---

---

Première partie .

Géométrie et statistique en  
turbulence hydrodynamique



## 2. Introduction

Dans la dernière décennie, le vieux problème de la turbulence hydrodynamique a connu un net regain d'intérêt, notamment grâce aux nouvelles approches expérimentales [11, 12] et aux capacités toujours croissantes de la simulation numérique directe (DNS) [13, 14]. Sur le plan théorique, de nombreux résultats analytiques ont été obtenus sur le problème du scalaire passif [15, 16].

L'étude de la turbulence s'est beaucoup basée sur la mesure et l'étude d'un signal (tel qu'une composante de la vitesse) en un ou deux points de l'écoulement. De nombreuses investigations ont en particulier porté sur les fonctions de structure d'ordre  $n$ , définies comme les moments d'ordre  $n$  de la différence d'une composante de la vitesse entre deux points de l'écoulement :

$$S_n(r) = \langle (u(\vec{x} + \vec{r}, t) - u(\vec{x}, t))^n \rangle$$

L'étude de la dépendance de ces grandeurs vis à vis de l'échelle  $r^1$ , et de sa déviation à la loi de Kolmogorov (loi K41) [17] a permis d'identifier le phénomène d'intermittence : les fluctuations des champs de vitesse présentent des fluctuations relatives de plus en plus intenses lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales de plus en plus petites [5].

Pourtant, les fonctions de structure ne fournissent aucune information sur la structure géométrique des fluctuations de vitesse turbulentes, c'est-à-dire sur la configuration instantanée du champ de vitesse dans une région de l'écoulement. Il est en effet connu qu'au moins les plus grandes fluctuations sont associées à des structures bien définies de l'écoulement. Par exemple, les grandes valeurs de l'enstrophie  $\omega^2$  ( $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ ) sont associées à des filaments de vorticité, observables dans des écoulements réels [18] ou dans des DNS [19, 20]. Un compromis intéressant entre l'étude des fonctions de structure et celle, complète, de la configuration instantanée d'une région de l'écoulement consiste à s'intéresser aux fonctions de corrélation de la vitesse en plusieurs points. Cette approche permet de déceler les grandes fluctuations mais aussi de tenir compte de la géométrie locale de l'écoulement. Ainsi, il faut mesurer la vitesse en plus de deux points de l'écoulement pour avoir accès au tenseur de gradient de vitesse  $A_{ab} = \partial_a u_b$ , qui permet d'avoir accès au vecteur de

---

<sup>1</sup>Cette grandeur ne dépend que de  $r$  si l'écoulement est supposé statistiquement homogène (indépendant de  $\vec{x}$ ), isotrope (indépendant de la direction de  $\vec{r}$ ) et stationnaire (indépendant du temps).

---

vorticité et au tenseur des déformations  $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ . Il est reconnu que l'un des aspects essentiels de la turbulence tridimensionnelle est la tendance qu'a la vorticité à s'aligner avec la direction d'étirement intermédiaire de  $S$ .

L'utilisation de fonctions de corrélation multi-points s'est déjà avérée fructueuse pour l'étude de l'advection d'un scalaire passif par un écoulement turbulent [21, 22]. D'un point de vue technique, ces modèles ont montré l'intérêt d'approches phénoménologiques et de considérations lagrangiennes.

Ces observations ont conduit M. Chertkov, A. Pumir et B.I. Shraiman à proposer en 1999 un modèle phénoménologique pour la dynamique du tenseur de gradient de vitesse, ou plus précisément de sa moyenne sur une région dont la taille caractéristique est dans la zone inertielle :  $M_{ab} = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} d^3\vec{r} \partial_a u_b$  [7]. Cet objet est appelé tenseur de gradient de vitesse *coarse-grained*. Il permet d'avoir accès aux statistiques à n'importe quelle échelle de la gamme inertielle, selon la taille caractéristique du domaine  $\Gamma$ . L'écoulement est alors décrit en terme de champ moyen (on suit la dynamique lagrangienne de parcelles de fluide). La paramétrisation minimale d'un volume tridimensionnel étant un ensemble de quatre points, le modèle introduit dans [7] décrit la dynamique de quatre particules lagrangiennes, que l'on peut considérer comme étant les sommets d'un tétraèdre. C'est pourquoi on l'appellera par la suite « modèle du tétraèdre ». Ce dernier tient compte de la déformation géométrique et du changement de taille de cet objet, grâce à l'introduction de  $g$ , tenseur moment d'inertie du tétraèdre. Le modèle tient compte, à l'échelle du tétraèdre, des contraintes d'incompressibilité et de circulation. Au contraire, il modélise le mouvement incohérent des sommets de celui-ci par un bruit gaussien blanc en temps obéissant au scaling de Kolmogorov. La théorie proposée décompose également la pression en une composante locale, déterminée par le champ  $M$ , et une composante non locale, modélisée elle aussi par une force aléatoire gaussienne et delta-corrélée en temps.

Le modèle se présente sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques dont les variables sont le tenseur de gradient de vitesse  $M$  et le tenseur moment d'inertie  $g$ . Dans l'article original [7], une solution approchée est calculée dans la limite classique (déterministe). Dans un formalisme d'intégrale de chemin, la méthode consistait à construire la fonction de Green en suivant simplement la trajectoire déterministe, ce qui revient à négliger les effets du bruit. Bien que cette approximation soit très grossière, elle conduit à des résultats numériques en accord semi-quantitatif avec ceux obtenus par simulation numérique directe, mais aussi avec des mesures expérimentales ultérieures [8]. Le modèle semble donc réaliste, et une résolution plus fine du système stochastique devrait pouvoir apporter des résultats en accord encore meilleur avec les expériences et la DNS, ce qui permettrait de le valider.

Les avantages de ce modèle sont nombreux. Il apporte une information fondamentale sur les processus non linéaires de l'équation de Navier-Stokes, permet de mieux comprendre les processus de transfert d'énergie entre échelles [23], mais peut aussi

être appliqué à des schémas de LES (Large Eddy Simulation) [24].

Le but de la première partie de cette thèse est de calculer des solutions plus précises du modèle du tétraèdre. Devant la complexité du problème, la méthode la plus précise semble être une approche numérique de type Monte-Carlo. Pourtant, à cause du grand nombre de degrés de liberté du problème, il est impossible d'utiliser une telle méthode, les poids statistiques des différentes réalisations des bruits pouvant différer de plusieurs ordres de magnitude ! Nous avons donc dans un premier temps incorporé en partie l'effet du bruit en utilisant une approche de type semi-classique, dans laquelle on ne considère que la réalisation des bruits dont le poids statistique est le plus grand (la plus probable). Cette étude nous a permis de comprendre d'où venaient les contributions à la statistique les plus importantes, ce qui nous a permis par la suite d'élaborer un schéma de type Monte-Carlo approprié au système, dans lequel les bruits sont pris en compte plus rigoureusement. Enfin, ce modèle a été proposé pour décrire la dynamique du tenseur de gradient de vitesse dans le cas d'un écoulement homogène et isotrope, mais comme on le verra par la suite la forme de l'écoulement à grande échelle peut être facilement choisie. Nous avons donc, pour finir, étudié les solutions du modèle en turbulence sous cisaillement homogène. J'ai effectué toutes ces études avec Alain Pumir. Nous avons travaillé en collaboration avec Michael Chertkov pour la résolution du modèle par la méthode de type Monte-Carlo et pour son étude avec forçage anisotrope.

Le chapitre 3 présente le modèle, ainsi que sa dérivation et ses principales conséquences. La méthode de résolution du système dans l'approximation semi-classique ainsi que les solutions sous cette approximation sont décrites au chapitre 4. Le chapitre 5 traite de la résolution du modèle avec prise en compte plus rigoureuse des bruits. Les solutions du système dans le cas où l'écoulement est cisailé sont présentées dans le chapitre 6, tandis que le chapitre 7 est consacré à la conclusion de cette première partie.



---

---

## 3. Présentation du modèle

Dans ce chapitre on présente la dérivation et la définition du modèle [7, 25], le bilan d'énergie qui en découle, ainsi que les différentes méthodes de résolution possibles. Dans la section 3.5 sont montrées les solutions du modèle dans l'approximation déterministe, telles que présentées dans [7].

### 3.1. Le modèle

#### 3.1.1. Dynamique de $\rho$

Le premier pas dans la construction du modèle consiste à paramétrer les petits domaines considérés. Or, la paramétrisation minimale d'un volume de dimension trois est un ensemble de quatre points (un simplexe), que l'on peut voir comme étant les sommets d'un tétraèdre. Pour paramétrer un petit volume  $\Gamma$  de l'écoulement, on considère donc quatre particules lagrangiennes appartenant à ce volume. Le mouvement de leur centre de masse résulte de l'advection à grande échelle du volume et n'est donc d'aucun intérêt pour la présente étude. Par la suite on s'intéressera uniquement aux mouvements relatifs des particules. Leurs positions relatives peuvent être représentées par les trois vecteurs  $\vec{\rho}_1$ ,  $\vec{\rho}_2$  et  $\vec{\rho}_3$  tels que :

$$\begin{cases} \vec{\rho}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) / \sqrt{2} \\ \vec{\rho}_2 = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) / \sqrt{6} \\ \vec{\rho}_3 = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 - 3\vec{r}_4) / \sqrt{12} \end{cases}$$

où  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3$  et  $\vec{r}_4$  sont les vecteurs positions des particules lagrangiennes (Fig. 3.1). Il est en fait plus commode de traiter ces trois vecteurs sous la forme d'une matrice  $\rho$  telle que  $\rho_i^a$  est la  $a$ ème coordonnée du vecteur  $\vec{\rho}_i$ . On appellera  $\rho$  le *tenseur des coordonnées réduites* des sommets du tétraèdre. On peut définir de même le tenseur des vitesses réduites  $v$  où  $v_i^a = (\vec{v}_i)_a$ , avec :

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) / \sqrt{2} \\ \vec{v}_2 = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3) / \sqrt{6} \\ \vec{v}_3 = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 - 3\vec{u}_4) / \sqrt{12} \end{cases}$$

où  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$  et  $\vec{u}_4$  sont les vitesses des particules lagrangiennes (Fig. 3.1).

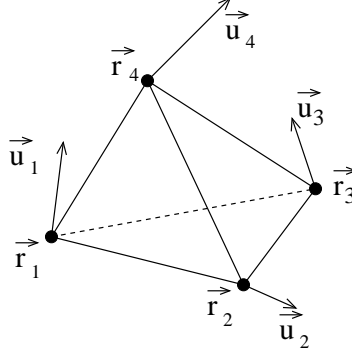


FIG. 3.1.: Tétrahédre formé par quatre particules lagrangiennes.

Par définition de  $\rho$  et  $v$ , on a la relation :

$$\frac{d\rho}{dt} = v \quad (3.1)$$

où  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée lagrangienne ( $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$ ).

En séparant les contributions des différentes échelles de l'écoulement, on peut formellement décomposer le champ de vitesse  $v$  sous la forme :

$$v = v_{k \ll 1/R} + v_{k \approx 1/R} + v_{k \gg 1/R}$$

où l'on aurait appliqué à  $v$  des filtres spatiaux respectivement passe-bas, passe-bande et passe-haut ( $R$  est la taille caractéristique du tétraèdre, que l'on peut définir par la relation  $R^2 = \text{Tr}(\rho^t \rho)$ ).

- $v_{k \ll 1/R}$ , qui modélise le déplacement global du tétraèdre, peut être ignoré car on suppose l'écoulement homogène.
- $v_{k \approx 1/R}$ , le terme cohérent à l'échelle du tétraèdre, est un mouvement d'ensemble préservant la forme du tétraèdre. Par définition de  $M$ , cette composante est égale à  $\rho M$ .
- $v_{k \gg 1/R}$  modélise l'action des petites échelles. C'est un terme incohérent à l'échelle  $R$ , qu'on modélisera donc sous la forme d'une composante fluctuante notée par la suite  $\zeta$ .

On obtient finalement l'équation suivante :

$$v_i^a = \rho_i^b M_{ba} + \zeta_i^a \quad (3.2)$$

où  $\zeta$  est une matrice fluctuante. Notons que l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement impose la condition  $\text{Tr } M = 0$ .

Les équations (3.1) et (3.2) impliquent finalement :

$$\frac{d\rho_i^a}{dt} = \rho_i^b M_{ba} + \zeta_i^a \quad (3.3)$$

### 3.1.2. Dynamique de $M$

Comme détaillé dans l'annexe A.2, il est possible de dériver de l'équation de Navier-Stokes une équation pour le tenseur de gradient de vitesse au sens usuel  $A_{ab} = \partial_a v_b$  (voir équation (A.5)). On postule que la dynamique de  $M$  est similaire à celle de  $A$ , d'où l'expression :

$$\frac{dM_{ab}}{dt} + M_{ab}^2 = F_{ab}(p, \nu), \quad (3.4)$$

où le terme  $F_{ab}(p, \nu)$  traduit les effets de pression et de viscosité. Contrairement au cas de la dynamique d'Euler Restreinte (cf annexe A.2), on désire s'affranchir de l'hypothèse non physique de pression isotrope, et on posera :

$$F_{ab}(p, \nu) = Tr(M^2) \Pi_{ab} + \xi_{ab} \quad (3.5)$$

Le terme  $Tr(M^2) \Pi_{ab}$  représente la composante locale de la pression, le tenseur  $\Pi$  mesurant l'anisotropie de cette dernière, alors que  $\xi_{ab}$  est un terme stochastique modélisant la partie non locale de la pression et les effets visqueux.

Les équations (3.4) et (3.5) impliquent :

$$\frac{dM_{ab}}{dt} + M_{ab}^2 - Tr(M^2) \Pi_{ab} = \xi_{ab} \quad (3.6)$$

On pose :

$$\Pi = \frac{(\rho^t \rho)^{-1}}{Tr[(\rho^t \rho)^{-1}]} \quad (3.7)$$

Cette définition du tenseur  $\Pi$  vérifie la condition d'incompressibilité  $Tr M = 0$  (car  $Tr \Pi = 1$  par construction). Ce choix particulier de  $\Pi$  est dicté par le fait que :

- dans le cas déterministe ( $\xi = 0$ ), les solutions du système ne divergent pas en un temps fini
- le terme de pression ne travaille pas, comme ce doit être le cas en turbulence homogène et isotrope (équation de von Kármán-Howarth [2]). Cette assertion sera vérifiée plus loin.

Il reste à modéliser le terme stochastique  $\xi$ . Considérons pour cela un polynôme d'ordre deux :

$$\xi = \eta + \psi M + \alpha (M^2 - \Pi \text{Tr}(M^2)) \quad (3.8)$$

où  $\eta$  et  $\psi$  sont respectivement une matrice et un scalaire aléatoires. Le terme en  $\alpha$  n'est clairement pas le plus général qu'on puisse écrire. Sa forme est inspirée des résultats de [26]. Dans cet article les auteurs ont étudié par simulation numérique directe les statistiques du membre de droite de (3.6) (dans le cas de tétraèdres isotropes) et ont constaté que la moyenne de  $\xi$  conditionnée sur  $M$  pouvait être bien approximée par  $\alpha (M^2 - \Pi \text{Tr}(M^2))$  ( $\alpha$  étant une constante comprise entre 0 et 0,8, et variant avec l'échelle de longueur considérée). Par souci de simplicité, on supposera ici que  $\alpha$  est constant dans la zone inertielle, et que  $\psi$  est nul. Sous ces hypothèses (3.6) devient :

$$\frac{dM}{dt} + (1 - \alpha) (M^2 - \text{Tr}(M^2) \Pi) = \eta \quad (3.9)$$

Les équations (3.3), (3.9) et (3.7) définissent la dynamique des tenseurs  $\rho$  et  $M$ . Pour fermer le modèle il reste à définir plus précisément les termes fluctuants  $\zeta$  et  $\eta$ .

### 3.1.3. Propriétés statistiques des bruits

Pour que le modèle soit le plus simple possible, on suppose que  $\zeta$  et  $\eta$  sont des bruits gaussiens, de moyennes nulles, delta-corrélés en temps. On impose également que leurs statistiques vérifient le scaling de Kolmogorov. D'où les expressions de leurs variances :

$$\langle \zeta_{ab}(\rho, t) \cdot \zeta_{cd}(0, 0) \rangle = [C_{\parallel} \rho_{ab} \rho_{cd} + C_{\perp} (\rho^2 \delta_{ac} \delta_{bd} - \rho_{ab} \rho_{cd})] \sqrt{\text{Tr}(MM^t)} \delta(t) \quad (3.10)$$

$$\langle \eta_{ab}(\rho, t) \cdot \eta_{cd}(0, 0) \rangle = C_{\eta} \frac{\varepsilon}{\rho^2} \left( \delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \delta(t) \quad (3.11)$$

où  $\varepsilon$  est le taux de dissipation d'énergie introduit dans la théorie K41, et  $\rho^2 = \text{Tr}(\rho^t \rho)$ .  $C_{\parallel}$ ,  $C_{\perp}$  et  $C_{\eta}$  sont des paramètres du modèle.

Dans l'équation (3.10) on a séparé les contributions des composantes longitudinale (terme en  $C_{\parallel}$ ) et transverse (terme en  $C_{\perp}$ ) du bruit. La première n'a pas en réalité un rôle primordial : elle contribue à l'étirement du tétraèdre, déjà assuré par le

terme déterministe  $\rho M$  (cf équation (3.3)). Par la suite on supposera selon les cas que  $C_{\parallel} = 0$  ou que  $C_{\parallel} = C_{\perp}$ . Par contre, la présence de la composante transverse du bruit  $\zeta$  est essentielle, car en son absence l'étirement cohérent du tétraèdre mènerait à une croissance très rapide de l'anisotropie.

Les équations (3.3), (3.9), (3.7), (3.10) et (3.11) définissent le modèle du tétraèdre, qui se présente finalement sous la forme du système d'équations différentielles ordinaires stochastiques suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \rho M + \zeta \\ \frac{dM}{dt} + (1 - \alpha) (M^2 - \text{Tr}(M^2) \Pi) &= \eta \\ \Pi &= \frac{(\rho^t \rho)^{-1}}{\text{Tr}[(\rho^t \rho)^{-1}]} \\ \langle \zeta_{ab}(\rho, t) \cdot \zeta_{cd}(0, 0) \rangle &= [C_{\parallel} \rho_{ab} \rho_{cd} + C_{\perp} (\rho^2 \delta_{ac} \delta_{bd} - \rho_{ab} \rho_{cd})] \sqrt{\text{Tr}(MM^t)} \delta(t) \\ \langle \eta_{ab}(\rho, t) \cdot \eta_{cd}(0, 0) \rangle &= C_{\eta} \frac{\varepsilon}{\rho^2} \left( \delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \delta(t) \end{aligned}$$

On appellera par la suite ce système (S.3).

Il est important de noter que ce modèle est phénoménologique, on a donc toute possibilité de jouer sur les différents termes de (S.3).

## 3.2. Équation de Fokker-Planck et bilan d'énergie

Le système (S.3) définit un problème stochastique bien posé. On peut donc en dériver une équation de Fokker-Planck pour la fonction distribution de probabilité  $P(M, \rho, t)$ . On obtient :

$$\partial_t P(M, \rho, t) = L P(M, \rho, t) \tag{3.12}$$

où l'opérateur d'évolution s'écrit (si  $C_{\parallel} = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 L = & (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial M_{ab}} (M_{ab}^2 - \Pi_{ab} Tr M^2) - \frac{\partial}{\partial \rho_b^i} \rho_i^a M_{ab} \\
 & + C_\eta \frac{\varepsilon}{\rho^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial M_{ab} \partial M_{ab}} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial M_{aa} \partial M_{bb}} \right) \\
 & + C_\perp \sqrt{Tr(MM^t)} \frac{\partial}{\partial \rho_i^a} (\rho^2 \delta^{ab} \delta_{ij} - \rho_i^a \rho_j^b) \frac{\partial}{\partial \rho_j^b}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Une distribution de probabilité  $P(M, \rho, t)$  vérifiant (3.12) peut être interprétée comme une distribution de probabilité eulérienne à condition d'imposer la condition de normalisation  $\int dM P(M, \rho) = 1$ , ce qui revient à considérer  $P(M, \rho)$  non plus comme une distribution de probabilité jointe, mais comme la distribution de probabilité de  $M$  conditionnée sur  $\rho : P(M|\rho)$ .

Avant de chercher les solutions de cette équation, on s'intéresse au bilan d'énergie, qui est un élément essentiel pour la validation du modèle. Ce bilan peut se dériver de (3.12) et (3.13) en écrivant l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} Tr(VV^t)$  avec  $V_a^i \equiv \rho_b^i M_{ba}$ . En multipliant (3.12) par  $\frac{1}{2} Tr(VV^t)$  et en moyennant sur  $M$ , on obtient le bilan d'énergie suivant<sup>1</sup> :

$$\frac{1}{2} \partial_t \langle Tr(VV^t) \rangle_\rho = - \frac{\partial}{\partial \rho_a^i} \langle V_a^i Tr(VV^t) \rangle_\rho + \alpha \langle Tr(VV^t M) \rangle_\rho + \frac{16}{3} C_\eta \varepsilon - C_\perp D_d + C_\perp f \tag{3.14}$$

où :

$$D_d = 18 \left\langle \sqrt{Tr(MM^t)} Tr \left[ \left( \rho \rho^t - \frac{1}{3} \rho^2 \right) MM^t \right] \right\rangle_\rho$$

et :

$$f = \frac{\partial}{\partial \rho_a^i} (\rho^2 \delta^{ab} \delta_{ij} - \rho_i^a \rho_j^b) \frac{\partial}{\partial \rho_j^b} \left\langle \sqrt{Tr(MM^t)} Tr(VV^t) \right\rangle_\rho - 2 \rho_j^c \left\langle \sqrt{Tr(MM^t)} (MM^t)_{bc} \right\rangle_\rho$$

L'équation (3.14) appelle quelques commentaires :

- La contribution de la partie déterministe de la pression  $\Pi Tr(M^2)$  au bilan d'énergie est nulle. On retrouve bien le fait que la pression ne travaille pas, comme ce doit être le cas en turbulence homogène et isotrope (cf équation de von Kármán-Howarth [2]).

---

<sup>1</sup>  $\langle \dots \rangle_\rho \equiv \int dM \dots P(M, \rho)$  est calculée à  $\rho$  fixé et est donc fonction de l'échelle.

- Le terme  $-\frac{\partial}{\partial \rho_a^i} \langle V_a^i Tr(VV^t) \rangle_\rho$  est la divergence du flux d'énergie à grande échelle. Il est compensé non pas par un terme de dissipation visqueuse, mais par le terme de dissipation sous-maille  $\alpha \langle Tr(VV^t M) \rangle_\rho$ , car  $V$  est la vitesse moyennée sur une échelle de la gamme inertielle.
- Les trois derniers termes de (3.14) sont dus au couplage de la dynamique avec les fluctuations à petite échelle. Le terme en  $C_\eta$  modélise la dissipation du flux d'énergie due aux petites échelles. Le terme  $-C_\perp D_d$  représente le flux d'énergie transverse, qui correspond à la redistribution de l'énergie dans la couche où  $\rho$  est constant. Le terme  $C_\perp f$  est la contribution diffusive à la dissipation sous-maille  $\alpha \langle Tr(VV^t M) \rangle_\rho$ .

### 3.3. Solution en terme d'intégrales de chemin

On cherche maintenant à exprimer les distributions de probabilité eulériennes  $P(M, \rho)$  solutions de l'équation de Fokker-Planck (3.12). On s'intéresse uniquement aux solutions stationnaires. Celles-ci sont solutions de l'équation (cf (3.12)) :

$$LP = 0 \quad (3.15)$$

Pour qu'elle soit entièrement déterminée on doit également imposer une condition de bord. Pour cela, on tient compte du fait (bien connu) que la distribution de vitesses dans un écoulement turbulent est quasiment gaussienne à grande échelle. On impose donc une distribution gaussienne à l'échelle intégrale  $L$  :

$$P(M, \rho^2 = L^2) \sim \exp \left[ -\frac{Tr(MM^t)}{\varepsilon^{2/3} L^{-4/3}} \right] \quad (3.16)$$

Enfin, comme on l'a vu précédemment, pour pouvoir être considérée comme une fonction distribution de probabilité eulérienne,  $P(M, \rho)$  doit vérifier la condition de normalisation :

$$\int dM P(M, \rho) = 1 \quad (3.17)$$

Le système (3.15, 3.16, 3.17) peut être résolu formellement en introduisant la fonction de Green du système, qui permet d'exprimer la fonction distribution de probabilité (PDF) de  $(M, \rho)$  en fonction de la PDF de  $(M', \rho')$  à un instant différent, soit :

$$P(M, \rho) = \int dM' \int dt G_{-T}(M; \rho | M'; \rho') P(M', \rho'), \quad (3.18)$$



La fonction de Green  $G_{-T}$  est associée à la probabilité de transition lagrangienne d'un tétraèdre  $(M', \rho')$  à un autre  $(M, \rho)$  pendant la durée  $T$ . Elle s'écrit :

$$G_{-T}(M; \rho | M'; \rho') = \int_{M(-T)=M'}^{M(0)=M} [DM''] \int_{\rho(-T)=\rho'}^{\rho(0)=\rho} [D\rho''] \exp [-S(M''; \rho'')], \quad (3.19)$$

Les intégrations effectuées dans (3.19) sont des intégrations de chemin, c'est-à-dire que l'on doit intégrer  $\exp [-S(M''; \rho'')]$  sur toutes les trajectoires reliant le point initial  $(M', \rho')$  à l'instant  $-T$  au point  $(M, \rho)$  à l'instant 0. L'action  $S$  mesure le poids statistique de chaque trajectoire.

Les équations (3.18), (3.19) et (3.16) conduisent à l'expression finale de la distribution de probabilité :

$$P(M, \rho) = \int dM' \int dT \int_{M(0)=M'}^{M(t)=M} [DM''] \int_{\rho(0)=\rho'}^{\rho(t)=\rho} [D\rho''] \exp - \left[ S(M''; \rho'') + \frac{Tr(M'M'^t)}{\varepsilon^{2/3} L^{-4/3}} \right] \quad (3.20)$$

Formellement la distribution de probabilité  $P(M, \rho)$  se calcule en considérant toutes les trajectoires commençant en un point  $(M', \rho')$  à l'échelle intégrale à l'instant  $-T$  et se terminant au point  $(M, \rho)$  à l'instant 0 (voir figure 3.2).

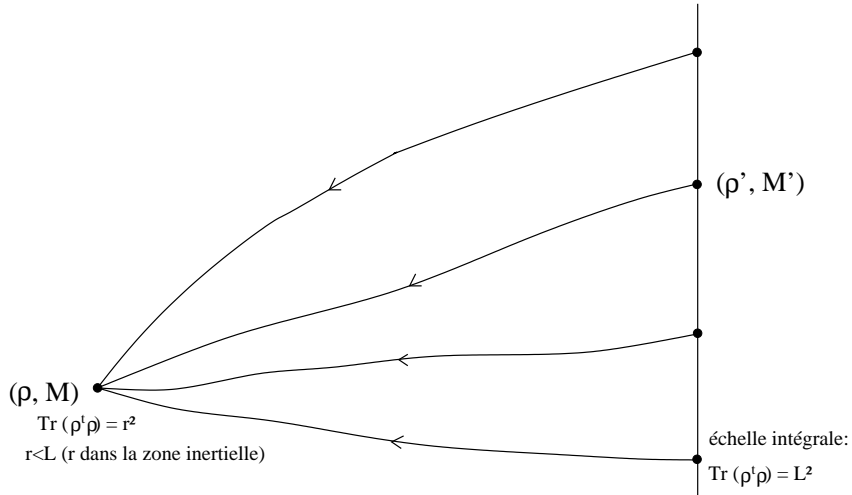


FIG. 3.2.: On doit en principe tenir compte de toutes les trajectoires de l'espace des phases commençant en un point  $(M', \rho')$  à l'instant  $-T$  et se terminant au point  $(M, \rho)$  à l'instant 0.

### 3.4. Méthodes de résolution - Problématique

Une évaluation correcte de la distribution de probabilité  $P(M, \rho)$  nécessite donc d'intégrer la dynamique sur toutes les trajectoires reliant  $(M, \rho)$  à  $(M', \rho')$ . En principe ceci peut être fait numériquement en utilisant un algorithme de Monte-Carlo. Pourtant, à cause de la grande dimension de l'espace des phases (dimension 17, car  $M$  dépend de 8 paramètres indépendants et  $\rho$  de 9), et donc du grand nombre de degrés de liberté du problème, ceci apparaît comme une tâche trop ardue. En effet, une simple intégration de la dynamique par Monte-Carlo conduit à des configurations dont les poids statistiques peuvent différer de plusieurs ordres de grandeur.

Il semble donc nécessaire dans un premier temps de comprendre l'origine des contributions statistiques significatives dans l'intégrale de chemin (3.20). Cela nous permettrait par la suite de réaliser un algorithme de Monte-Carlo adapté au problème, et donc efficace. Pour cela, nous avons calculé dans un premier temps les solutions de (3.20) dans l'approximation semi-classique, dans laquelle on ne tient compte que de la trajectoire dont le poids statistique est le plus important (la réalisation des bruits la plus probable). Les résultats de cette approche sont présentés au chapitre 4. Ils nous ont permis de réaliser par la suite un schéma de type Monte-Carlo dans lequel les bruits sont traités plus rigoureusement. Les solutions de (3.20) calculées par cette méthode sont présentées au chapitre 5.

Une représentation commode des résultats consiste à calculer les distributions de probabilité jointes  $P(R, Q)$  solutions du modèle et de les comparer à celles calculées par DNS. Les quantités  $Q$  et  $R$ , définies en annexe A.1, sont fonction de  $M$  et déterminent la topologie locale de l'écoulement.

### 3.5. Solutions du modèle calculées dans l'approximation déterministe

À titre de comparaison, on présente dans cette section les solutions du modèle dans l'approximation déterministe. La figure 3.3 montre des fonctions distributions de probabilité jointes  $P(R, Q)$  solutions de la partie déterministe du modèle à deux échelles de longueur différentes. Les graphes sont extraits de [7]. Ces distributions peuvent être comparées à celles calculées par simulation numérique directe (DNS) (voir annexe B). Les solutions déterministes du modèle présentent un accord qualitatif très acceptable avec la DNS dans la partie du plan  $R < 0$ . Par contre, elles présentent une « vallée » de faible probabilité dans la partie  $R > 0$  en désaccord avec les résultats de DNS. Ce phénomène s'explique par le fait que, dans le plan  $(R, Q)$ , la préimage par la dynamique déterministe d'un point sur le côté  $R > 0$  de la séparatrice converge au voisinage de l'origine, donc dans une région de grande probabilité, tandis que la préimage d'un point dans la région  $D > 0, R > 0$  se trouve

plutôt dans la partie  $Q > 0$ ,  $R > 0$ , une région de faible probabilité (voir les flots des invariants  $Q$  et  $R$  associés à la dynamique d'Euler Restreinte en annexe A.2 et calculés par DNS dans [7]).

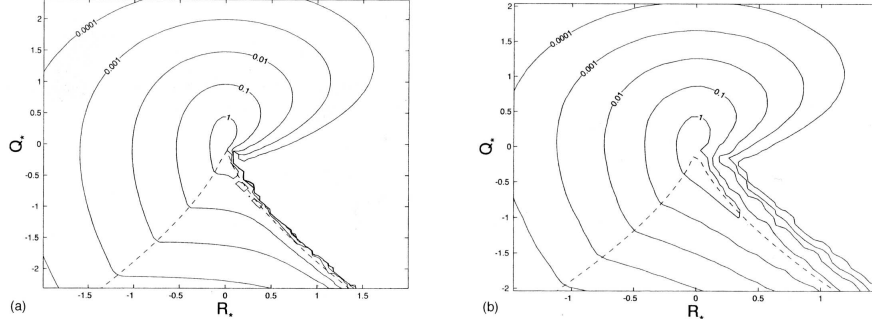


FIG. 3.3.: Distributions de probabilité jointes  $P(R_*, Q_*)$  calculées dans l'approximation déterministe du modèle : (a)  $r=L/5$  et (b)  $r=L/2$ . Les quantités  $R_*$  et  $Q_*$  sont normalisées par la variance des déformations :  $Q_* = Q / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ ,  $R_* = R / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle^{3/2}$ . Les lignes d'isoprobabilité sont espacées logarithmiquement, et séparées de facteurs 10 (extrait de [7]).

On peut espérer que la prise en compte des fluctuations permette de supprimer cette vallée de faible probabilité en désaccord avec la DNS et les expériences [8]. On se propose donc dans les deux chapitres suivants de calculer les solutions du modèle en tenant compte de ces fluctuations.

## 4. Résolution du modèle dans l'approximation semi-classique

Ce chapitre traite de la résolution du modèle dans l'approximation semi-classique, qui consiste à ne considérer que la réalisation des bruits la plus probable. Nous avons d'abord essayé de résoudre la version complète du modèle (S.3) dans cette approximation. Mais des problèmes de convergence numérique nous ont conduits à considérer une version simplifiée du modèle, dans laquelle l'un des bruits est traité en champ moyen. La méthode de résolution du modèle dans l'approximation semi-classique est présentée en 4.1, les solutions du modèle complet (non convergées) sont montrées en 4.2. Dans la section 4.3 est introduite la version simplifiée du modèle, dont les solutions semi-classiques sont montrées en 4.4. Les conclusions de ce chapitre sont rassemblées dans la section 4.5.

### 4.1. Description de la méthode employée

#### 4.1.1. Recherche de la trajectoire d'action minimale

On cherche à résoudre le système (S.3) dans l'approximation semi-classique. Dans ce cas, on ne considère dans l'équation (3.20) que la trajectoire qui maximise l'intégrant, c'est-à-dire celle dont l'action est minimale. Cette procédure est en principe valide dans la limite où les bruits sont faibles. Elle nous sert de première étape dans la recherche des solutions du modèle. Dans cette approximation, on remplace simplement dans (3.20) l'intégrale par sa valeur au col, obtenue en substituant la trajectoire optimale dans le terme d'action :

$$P(M, \rho) \sim \exp - \left[ S_c(M''; \rho'') + \frac{\text{Tr}(M' M'')}{\varepsilon^{2/3} L^{-4/3}} \right] \quad (4.1)$$

On peut déterminer la trajectoire optimale en écrivant les équations d'Euler-Lagrange appropriées. Il nous faut auparavant écrire explicitement le Lagrangien  $\mathcal{L}$  ( $S = \int_0^T dt \mathcal{L}$ ). Son expression se déduit de (S.3). Dans le cas où  $C_{\parallel} = C_{\perp}$ , on a <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Cette dernière hypothèse est nécessaire pour écrire explicitement le Lagrangien, car on doit pour

:

$$\mathcal{L} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}m \cdot \mathcal{D}m^t)}{2C_{\parallel}} + \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}\rho \cdot \mathcal{D}\rho^t)}{2C_{\perp}\rho^2\sqrt{\text{Tr}(mm^t)}} \quad (4.2)$$

avec :

$$\mathcal{D}m = \frac{dm}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} m + (1 - \alpha) (m^2 - \text{Tr}(m^2) \Pi)$$

et

$$\mathcal{D}\rho = \frac{d\rho}{dt} - \rho m$$

On a au préalable effectué le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} dt' = \varepsilon^{-1/3} \rho^{2/3} dt \\ M = \varepsilon^{1/3} \rho^{-2/3} m \end{cases}$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien (4.2) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{m}_{ab}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{ab}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}_{ab}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{ab}} \end{aligned}$$

### 4.1.2. Méthode de résolution

Comme on l'a vu en 3.5, on se propose de calculer les distributions de probabilité jointes des invariants  $Q$  et  $R$  en fonction de l'échelle  $r$ . Pour cela, on se donne une condition initiale à cette petite échelle, puis on intègre le système (4.3) en remontant le temps, jusqu'à ce que l'échelle intégrale  $L$  soit atteinte :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial \mathcal{L} / \partial \dot{m}_{ab} \\ \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\rho}_{ab} \\ m_{ab} \\ \rho_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{L} / \partial m_{ab} \\ \partial \mathcal{L} / \partial \rho_{ab} \\ \dot{m}_{ab} \\ \dot{\rho}_{ab} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Or, en se fixant les trois quantités  $Q$ ,  $R$  et  $r$ , les conditions initiales (à petite échelle) ne sont pas entièrement déterminées :

---

cela pouvoir inverser le tenseur  $G_{ab,cd} = C_{\parallel} \rho_{ab} \rho_{cd} + C_{\perp} (\rho^2 \delta_{ac} \delta_{bd} - \rho_{ab} \rho_{cd})$ . Mais le problème peut aussi être étudié dans sa version hamiltonienne [27] (voir annexe D.2). Dans ce cas on peut résoudre le problème pour des valeurs quelconques de  $C_{\parallel}$  et  $C_{\perp}$ . Les résultats que nous avons obtenus par cette méthode sont du même type que ceux présentés par la suite.

- $m$  est une matrice  $3 \times 3$ , elle a donc 9 composantes. À cause de la condition d'incompressibilité  $Tr(m) = 0$  et des trois degrés de liberté par rotation, ces 9 composantes ne dépendent que de 5 paramètres indépendants. Deux d'entre eux sont fixés par  $Q$  et  $R$ , mais trois restent indéterminés : ce sont les composantes de la vortacité <sup>2</sup>
- $\rho$  est entièrement déterminé. On le choisit isotrope à l'instant initial, soit :  $\rho_{ab} = r\delta_{ab}$
- $\dot{m}$  et  $\dot{\rho}$  sont a priori indéterminés, laissant  $8+9=17$  paramètres libres supplémentaires pour définir les conditions initiales

Au total, en se fixant  $Q$ ,  $R$  et  $r$  on garde 20 paramètres indéterminés pour définir les conditions initiales. En principe, il est nécessaire d'intégrer la PDF sur ces variables, mais pour économiser du temps de calcul on effectue ici une seconde approximation (approximation du col), en remplaçant l'intégration par une maximisation sur les 20 variables.

L'algorithme que nous avons utilisé est finalement le suivant :

- On se fixe  $Q$ ,  $R$  et  $r$  et 20 paramètres libres.
- On intègre le système (4.3) jusqu'à ce que l'échelle intégrale soit atteinte, c'est-à-dire jusqu'à ce que  $Tr(\rho^t \rho) = L^2$ . On a alors l'opposé de l'intégrand  $S_c(M''; \rho'') + Tr(M' M'^t) / \varepsilon^{2/3} L^{-4/3}$  (cf équation (4.1)) en fonction des 20 paramètres.
- On calcule le minimum de cette fonction  $f$  de 20 variables : c'est, au signe près, le logarithme de la PDF recherchée ( $f \equiv -\ln(PDF)$ ).

## Méthode d'optimisation

Pour résoudre le problème d'optimisation résultant, nous avons tout d'abord utilisé la méthode du simplexe « amoeba » [28], qui converge lorsque la fonction a des propriétés de convexité simples dans l'espace des phases. Or, dans le problème considéré, la fonction à minimiser  $f$  s'est avérée avoir une structure complexe, de sorte que l'utilisation de cet algorithme conduisait à des minima locaux mais pas globaux.

Cette difficulté peut être contournée en combinant la méthode du simplexe avec la technique du recuit simulé. Nous avons donc utilisé l'algorithme « amebsa » [29].

---

<sup>2</sup>La paramétrisation de  $M$  est la suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{– pour } D > 0, M = \begin{pmatrix} \lambda & \Delta e^\gamma & \omega_2 \\ -\Delta e^{-\gamma} & \lambda & \omega_1 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \\
 & \text{– pour } D < 0, M = \begin{pmatrix} \lambda + \Delta & \omega_3 & \omega_2 \\ 0 & \lambda - \Delta & \omega_1 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Le couple  $(\lambda, \Delta)$  est en relation bijective avec  $(Q, R)$ .  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont les composantes de la vortacité (dans le cas  $D > 0$ ,  $\omega_3 \equiv 2\Delta ch(\gamma)$ ).

Pour une description complète de ces méthodes numériques, on pourra consulter l'annexe C.

## 4.2. Tentative de résolution du modèle complet

Nous avons dans un premier temps appliqué la méthode décrite dans la section précédente au système (S.3). La figure 4.1 montre une distribution de probabilité jointe  $P(R, Q)$  typique calculée de cette manière. La distribution, comparée à celles calculées par DNS (figure B.2), est très nettement sous-estimée dans la partie  $D > 0, R > 0$ .

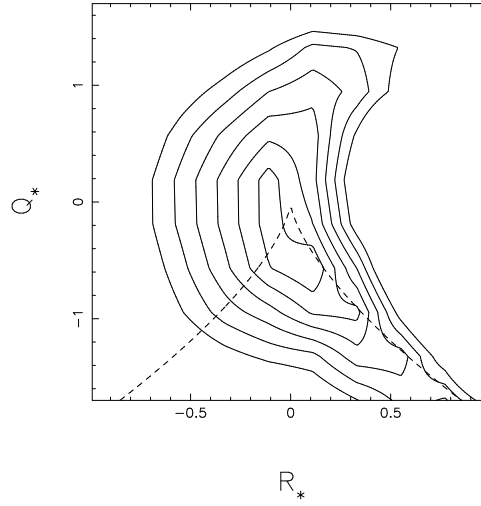


FIG. 4.1.: *Distribution de probabilité jointe  $P(R, Q)$  typique calculée dans l'approximation semi-classique du système (S.3). Ici  $r/L = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $C_\eta = 0,01$ ,  $C_\parallel = C_\perp = 0,01$ . La probabilité est sous-estimée dans la partie  $R, Q > 0$ .*

Ce problème vient du fait que, pour des valeurs positives de  $Q$  et  $R$ , l'algorithme d'optimisation converge vers des minima locaux (et non pas globaux) de  $f$ . Les paramètres de l'algorithme ameba sont nombreux. On peut ainsi choisir la taille du simplexe initial, le nombre de recuits, les valeurs initiales de la température à chacun d'entre eux, le schéma de décroissance de cette température, le nombre de paliers de température et le nombre d'itérations de l'algorithme du simplexe à chacun de ces paliers, ainsi que la différence relative entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction aux sommets du simplexe en-dessous de laquelle on considère qu'on a détecté un optimum local de la fonction (voir annexe C). J'ai effectué de nombreux tests de convergence de l'algorithme pour des valeurs différentes de ces paramètres. En aucun cas la convergence vers le minimum global de  $f$  pour toutes les valeurs de

$Q$  et  $R$  n'a été assurée. Pour comprendre cet échec de l'algorithme, j'ai regardé la topologie de  $f$  entre ses deux plus bas minima locaux détectés par recuit.

La figure 4.2 représente, pour plusieurs valeurs positives de  $Q$  et  $R$ , la différence relative entre la valeur de la fonction et la plus petite valeur obtenue par recuit au voisinage de ce minimum.  $f$  dépend de 20 variables, mais on a représenté la coupe de cette fonction sur une droite reliant les deux meilleurs minima trouvés. Cette simple étude de  $f$  dans une direction ne suffit bien sûr pas pour caractériser sa topologie, mais elle est suffisante pour en observer la grande irrégularité, et surtout la présence de « barrières » (voir surtout Fig. 4.2(a) et (b)), que l'algorithme ne parvient pas toujours à franchir, restant ainsi bloqué près de minima locaux.

J'ai essayé d'adapter l'algorithme à cette topologie particulière, par exemple en augmentant la température en présence de telles barrières. Malheureusement une telle procédure pose des problèmes de convergence. La méthode exposée en 4.1.2 ne nous a donc pas permis de résoudre le système (S.3).

## 4.3. Une version simplifiée du modèle

### 4.3.1. Définition

Nous avons donc fait le choix de considérer une version simplifiée du modèle (S.3). Cette simplification repose sur deux points :

- On considère le tenseur  $g$ , défini par la relation  $g = \rho^t \rho$ , au lieu du tenseur  $\rho$ .  $g$ , tenseur moment d'inertie du tétraèdre, ne dépend que de 6 paramètres indépendants, on gagne donc 3 variables dans le modèle. La dynamique de  $g$  se dérive de celle de  $\rho$  (en passant de la variable  $\rho$  à la variable  $g$ , on ne change pas le modèle).
- D'autre part, on a déjà vu que la composante longitudinale du bruit agissant sur la dynamique de  $\rho$  ne devait pas influencer sur la dynamique, car elle joue le même rôle que le terme déterministe  $\rho M$  (cf équation (3.3)). La composante transverse du bruit joue par contre un rôle primordial car elle empêche l'accroissement d'anisotropie du tétraèdre dû à ce même terme déterministe. On choisit donc de ne tenir compte dans le modèle que de cet effet de réisotropisation, et pour simplifier encore on traite celui-ci en champ moyen.

Le système considéré, que l'on appellera (S.4), est finalement le suivant :



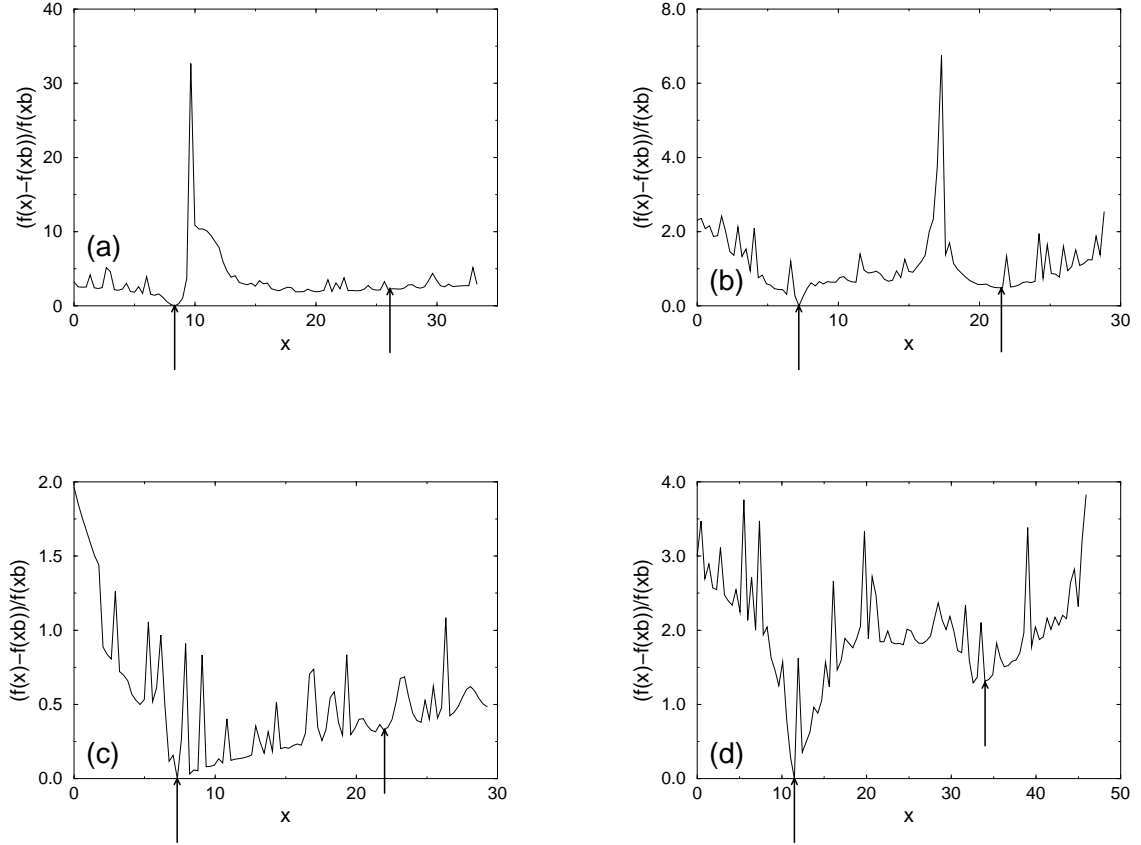


FIG. 4.2.: Différence relative entre  $f$  et sa valeur minimale obtenue par recuit, entre les deux meilleurs minima calculés ( $r/L = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $C_\eta = 0,01$ ,  $C_\parallel = C_\perp = 0,01$ ). (a)  $R = 0,67, Q = 1,33$ , (b)  $R = 0,67, Q = 4$ , (c)  $R = 2, Q = 1,33$  et (d)  $R = 2, Q = 4$ . Les positions des deux meilleurs minima localisés par l'algorithme sont repérées par des flèches ( $x_b$  est celui pour lequel la valeur de  $f$  est minimale).

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} + (1 - \alpha) (M^2 - \text{Tr}(M^2) \Pi) &= \eta \\ \frac{dg}{dt} &= gM + M^t g + \beta \sqrt{\text{Tr}(MM^t)} \left( g - \frac{1}{3} \text{Tr}(g) \delta \right) \\ \Pi &= \frac{g^{-1}}{\text{Tr}(g^{-1})} \\ \langle \eta_{ab}(\rho, t) \cdot \eta_{cd}(0, 0) \rangle &= \gamma \frac{\varepsilon}{\rho^2} \left( \delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \delta(t)\end{aligned}$$

où l'on a noté  $\beta$  et  $\gamma$  les amplitudes des bruits  $C_\perp$  et  $C_\eta$  pour alléger les notations. C'est celui que l'on se propose de résoudre dans toute l'étude qui suit.

(S.4) dépend de trois paramètres sans dimension :  $\alpha$ , la réduction de non-linéarité par la pression,  $\beta$ , qui mesure la tendance des petites échelles à réduire l'anisotropie, et  $\gamma$ , l'amplitude du terme de bruit agissant sur la dynamique de  $M$ . On se propose d'étudier les solutions de (S.4) en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ <sup>3</sup>.

### 4.3.2. Paramètres de l'algorithme d'optimisation

Pour résoudre (S.4) dans l'approximation semi-classique, on a utilisé la méthode exposée en 4.1.2. Dans ce cas la fonction  $f$  ne dépend plus que de 11 variables au lieu de 20 : 3 paramètres libres pour déterminer  $M$  et 8 pour  $\dot{M}$  car  $\text{Tr}(\dot{M}) = 0$  pour maintenir l'incompressibilité. L'algorithme ameba converge alors beaucoup mieux vers le minimum global de  $f$ . Nous avons choisi les valeurs les plus efficaces des paramètres d'optimisation, en effectuant des tests de convergence préliminaires. Les valeurs de ces paramètres que nous avons utilisées sont finalement les suivantes : pour chaque valeur de  $(Q, R, r)$ , on considère un simplexe initial régulier de taille caractéristique 0,2. Cet objet subit un premier recuit, dont la température initiale est égale à 7, puis deux autres de températures initiales  $y_b/4$ , où  $y_b$  est la valeur optimale de la fonction rencontrée lors du recuit précédent. Dans ces trois recuits, la température est diminuée quadratiquement, et pour 10 valeurs régulièrement espacées de celle-ci l'algorithme amoeba est itéré 300 fois. L'algorithme suppose qu'un minimum local est détecté lorsque la différence relative entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction aux sommets du simplexe est inférieure à  $10^{-3}$ .

---

<sup>3</sup>Les solutions du problème dépendent également a priori des deux paramètres dimensionnés  $L$  et  $\varepsilon$ , mais cette dépendance disparaît par un simple changement de variables.

Les solutions de (S.4) calculées par cette méthode sont présentées dans la section suivante.

## 4.4. Solutions semi-classiques de la version simplifiée du modèle

La méthode décrite précédemment pour calculer les solutions semi-classiques du modèle (S.4) permet d'étudier le comportement des solutions en fonction des trois paramètres  $\alpha$  (la réduction de non-linéarité),  $\beta$  (qui mesure l'effet d'isotropisation des fluctuations de vitesse à petite échelle) et  $\gamma$  (l'amplitude du bruit agissant sur  $M$ ). Les résultats de DNS présentés dans l'annexe B sont un point de comparaison naturel pour discuter nos résultats.

Le résultat principal de cette section est le fait que le paramètre  $\alpha$  joue le rôle le plus significatif en déterminant le comportement qualitatif des solutions. Imposer que les solutions aient le bon comportement pour les moments de la vorticité, des déformations et du transfert d'énergie, ainsi que pour la fonction distribution de probabilité, restreint considérablement les valeurs possibles de  $\alpha$ .

### 4.4.1. Lois d'échelles

On discute tout d'abord les propriétés d'échelles de quantités telles que la variance des déformations  $\langle Tr(S^2) \rangle$ , l'enstrophie  $\langle \omega^2 \rangle$  et le terme de transfert d'énergie  $\langle -r^2 Tr(M^2 M^t) \rangle$ , dont l'expression est dérivée de (3.14) dans le cas où le tétraèdre est isotrope.

#### 4.4.1.1. Dépendance en fonction de $\alpha$

La figure 4.3 montre la dépendance de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  et  $\langle \omega^2 \rangle$  en fonction de l'échelle pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ , à  $\beta$  et  $\gamma$  fixés ( $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ). Selon le scaling K41 et les résultats de DNS présentés dans l'annexe B, ces deux quantités devraient évoluer en  $r^{-4/3}$ . Cette loi est correctement vérifiée par  $\langle \omega^2 \rangle$  pour toutes les valeurs de  $\alpha$  (Fig. 4.3(b)). Cependant, la quantité  $\langle Tr(S^2) \rangle$  est beaucoup plus sensible à la valeur de  $\alpha$  (Fig. 4.3(a)). Le fit de la dépendance de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  en fonction de  $r$  par une loi de puissance présente un bon accord avec l'exposant  $-4/3$  (vérifié par les résultats de DNS, Fig. B.1) pour les valeurs de  $\alpha$  de l'ordre de 0,5, mais montre une déviation significative de cet exposant pour les faibles valeurs de  $\alpha$ . La figure 4.5(a) montre l'évolution de l'exposant de la loi de puissance de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  en  $r$  en fonction de  $\alpha$ . D'après ces résultats, les solutions semi-classiques du modèle ne semblent

compatibles avec les résultats calculés par DNS que pour des valeurs suffisamment grandes de  $\alpha$  :  $\alpha \gtrsim 0,4$ .

La figure 4.4 montre la dépendance du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ ,  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$ , en fonction de l'échelle  $r$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ , à  $\beta$  et  $\gamma$  fixés ( $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ). Le résultat le plus marquant de cette analyse est le fait que le signe de cette quantité est correct (positif) seulement pour les petites valeurs de  $\alpha$  ( $\alpha \lesssim 0,5$ ). Pour ces valeurs de  $\alpha$ , la loi d'échelle du transfert d'énergie est en accord avec le scaling K41 (vérifié par les résultats de DNS, Fig. B.1) :  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle \propto r^{-2}$  et donc le transfert d'énergie  $\langle -r^2 Tr(M^2 M^t) \rangle$  est indépendant de l'échelle. On a tracé sur la figure 4.5(b) le signe du transfert d'énergie en fonction de  $\alpha$ . Dans certains cas, cette quantité est négative aux grandes échelles et positive aux petites : on a alors tracé la moyenne du signe sur toutes les échelles considérées.

Selon la figure 4.5, l'intervalle de valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles les solutions semi-classiques du modèle présentent un accord qualitatif avec la DNS est fortement contraint : seules les valeurs de  $\alpha$  proches de 0,45 ( $0,4 \lesssim \alpha \lesssim 0,5$ ) produisent des résultats en accord avec la DNS.

#### 4.4.1.2. Dépendance en fonction de $\beta$

La figure 4.6 montre la dépendance de  $\langle Tr(S^2) \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$  et  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  en fonction de l'échelle pour plusieurs valeurs de  $\beta$ , à  $\alpha$  et  $\gamma$  fixés ( $\alpha=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ). La valeur précise de  $\beta$  semble ne pas influencer du tout les lois d'échelles de ces quantités.

On a choisi des valeurs de  $\beta$  pas trop faibles.  $\beta$  doit en effet être suffisamment grand pour que l'effet d'isotropisation des fluctuations de vitesse à petite échelle soit efficace, sans quoi l'anisotropie du tétraèdre augmente démesurément.

#### 4.4.1.3. Dépendance en fonction de $\gamma$

La figure 4.7 montre la dépendance de  $\langle Tr(S^2) \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$  et  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  en fonction de l'échelle pour plusieurs valeurs de  $\gamma$ , à  $\alpha$  et  $\beta$  fixés ( $\alpha=0,4$ ,  $\beta=0,4$ ).

La valeur précise de  $\gamma$  n'affecte pas l'exposant des lois d'échelles. Elle modifie les préfacteurs des lois de puissance des seconds moments de  $S$  et  $\omega$ , mais n'a pas vraiment d'influence sur celles de  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$ , sauf à la plus grande échelle considérée, mais ce comportement peut être interprété comme la trace d'un transitoire à grande échelle.

Les valeurs de  $\gamma$  considérées ici sont assez petites ( $\leq 0,5$ ).  $\gamma$  mesure en effet l'amplitude du bruit, qui doit rester faible pour que la présente analyse ait un sens.

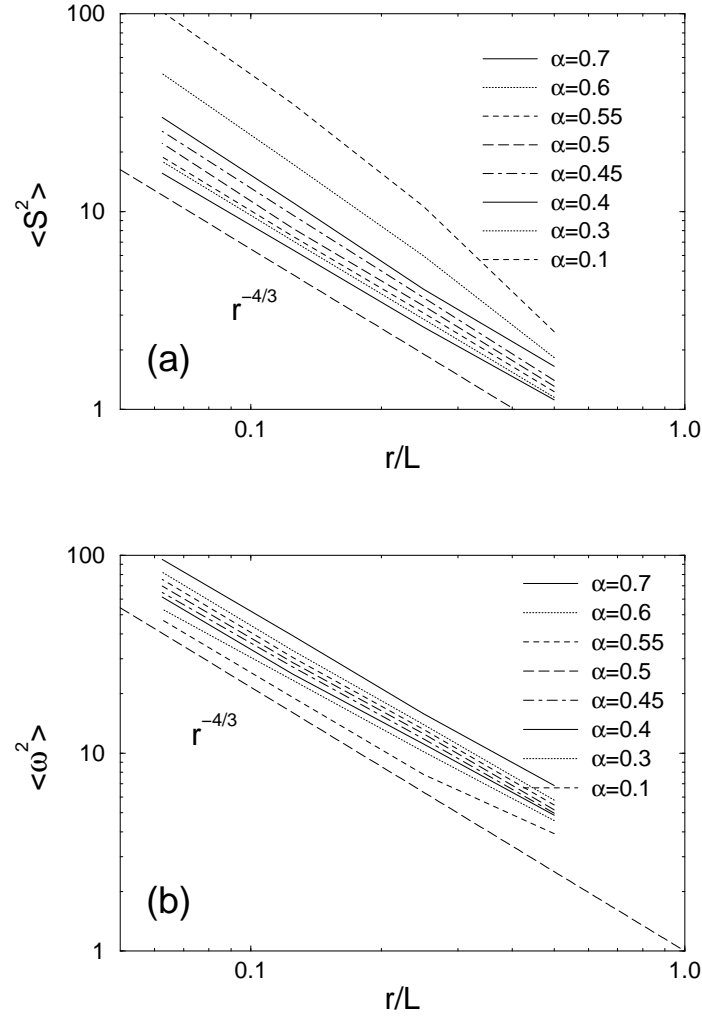


FIG. 4.3.: Lois d'échelles des seconds moments (a) des déformations et (b) de la vorticité, pour différentes valeurs de  $\alpha$  ( $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ). La droite de pente  $-4/3$  sert de guide pour l'œil.  $\alpha=0.7, 0.6, 0.55, 0.5, 0.45, 0.4, 0.3$  et  $0.1$  de bas en haut en (a) et de haut en bas en (b).

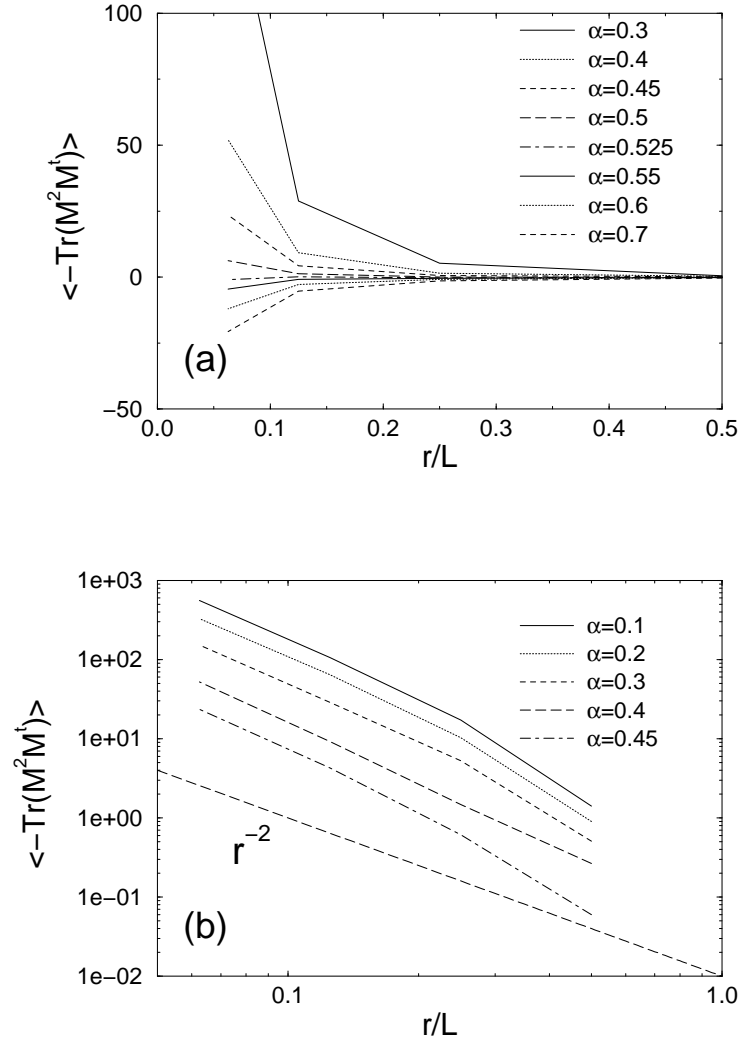


FIG. 4.4.: Transfert d'énergie divisé par  $r^2$ ,  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$ , en fonction de l'échelle pour différentes valeurs de  $\alpha$  ( $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ) : (a) échelle linéaire, (b) échelle logarithmique. Pour les grandes valeurs de  $\alpha$  cette quantité est négative.

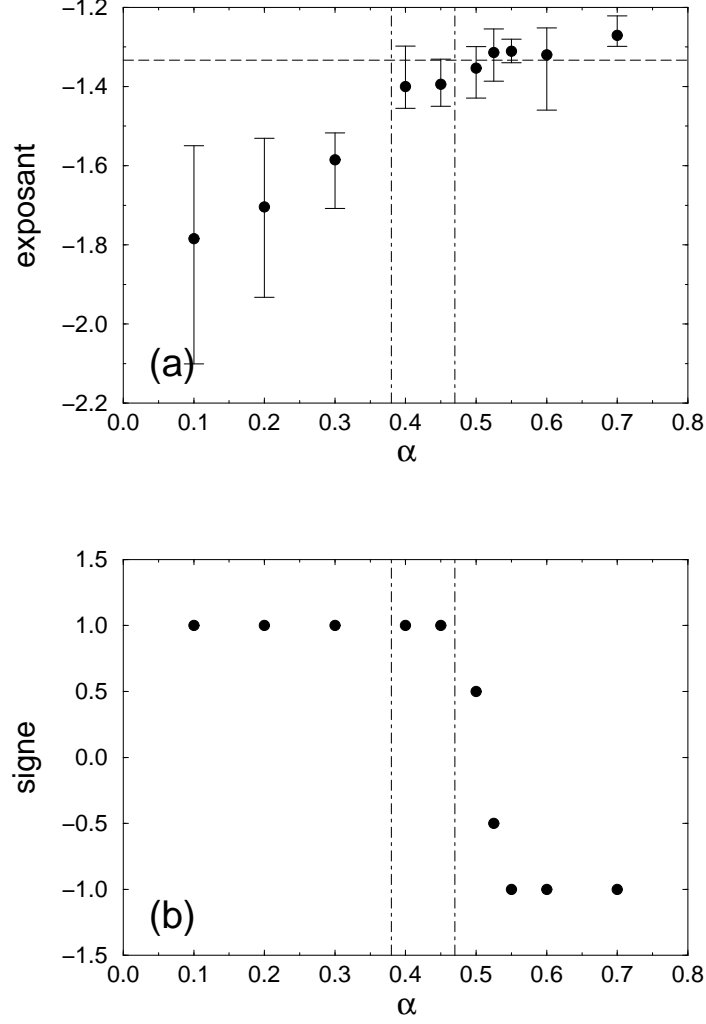


FIG. 4.5.: Dépendance par rapport à  $\alpha$  (a) de l'exposant de la loi d'échelle de  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$  et (b) du signe du transfert d'énergie  $\langle -r^2 \text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  ( $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ). En (a) la ligne horizontale en pointillés indique la prédiction de Kolmogorov  $-4/3$ . En (b) on a tracé pour chaque valeur de  $\alpha$  la moyenne du signe du transfert d'énergie sur toutes les échelles. La gamme de valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles les solutions du modèle ont un comportement acceptable vis à vis de la loi d'échelle de  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$  et du signe du transfert d'énergie est délimitée par les traits verticaux.

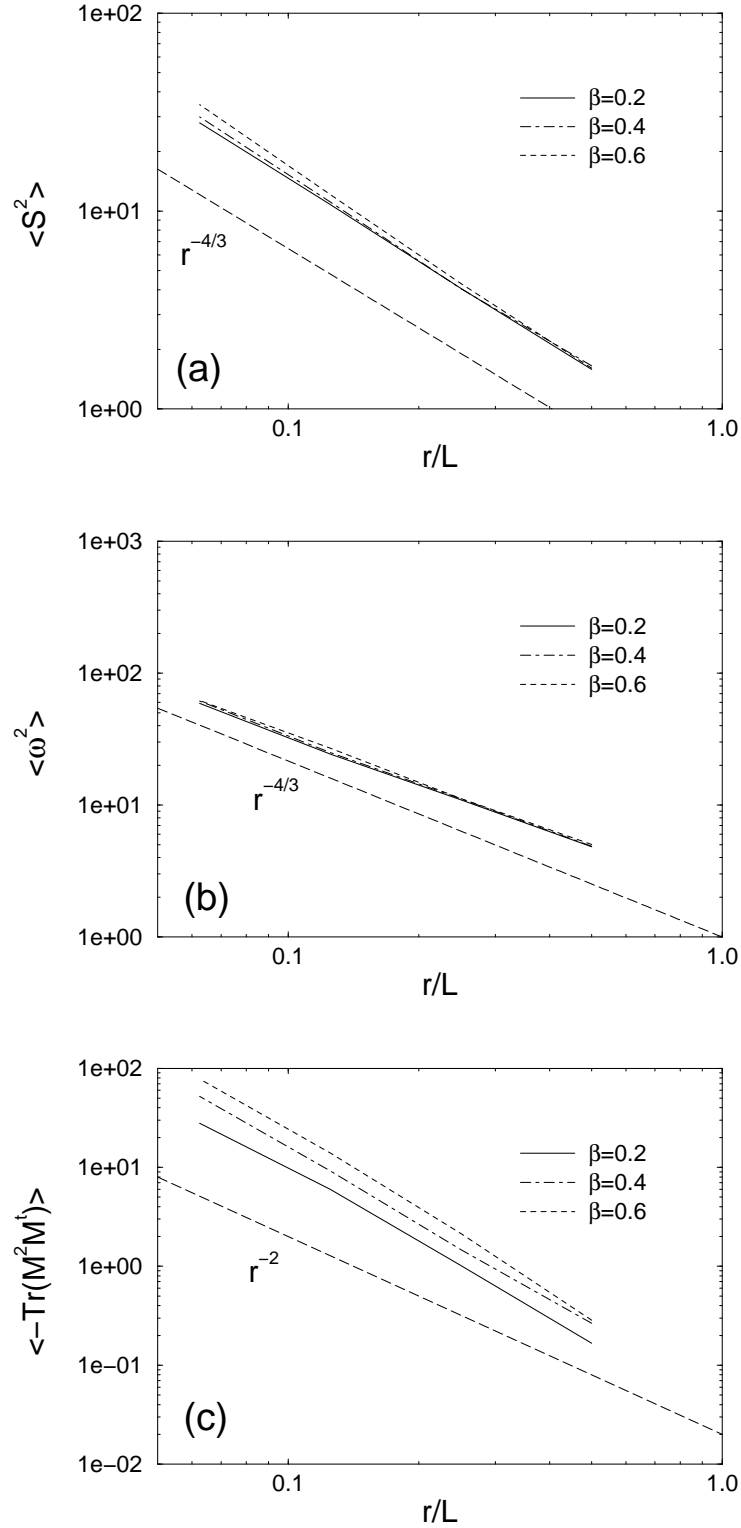


FIG. 4.6.: Lois d'échelles des seconds moments (a) des déformations et (b) de la vorticité. (c) Lois d'échelles du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ . Toutes ces lois d'échelles sont représentées pour trois valeurs de  $\beta$  ( $\alpha=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ).



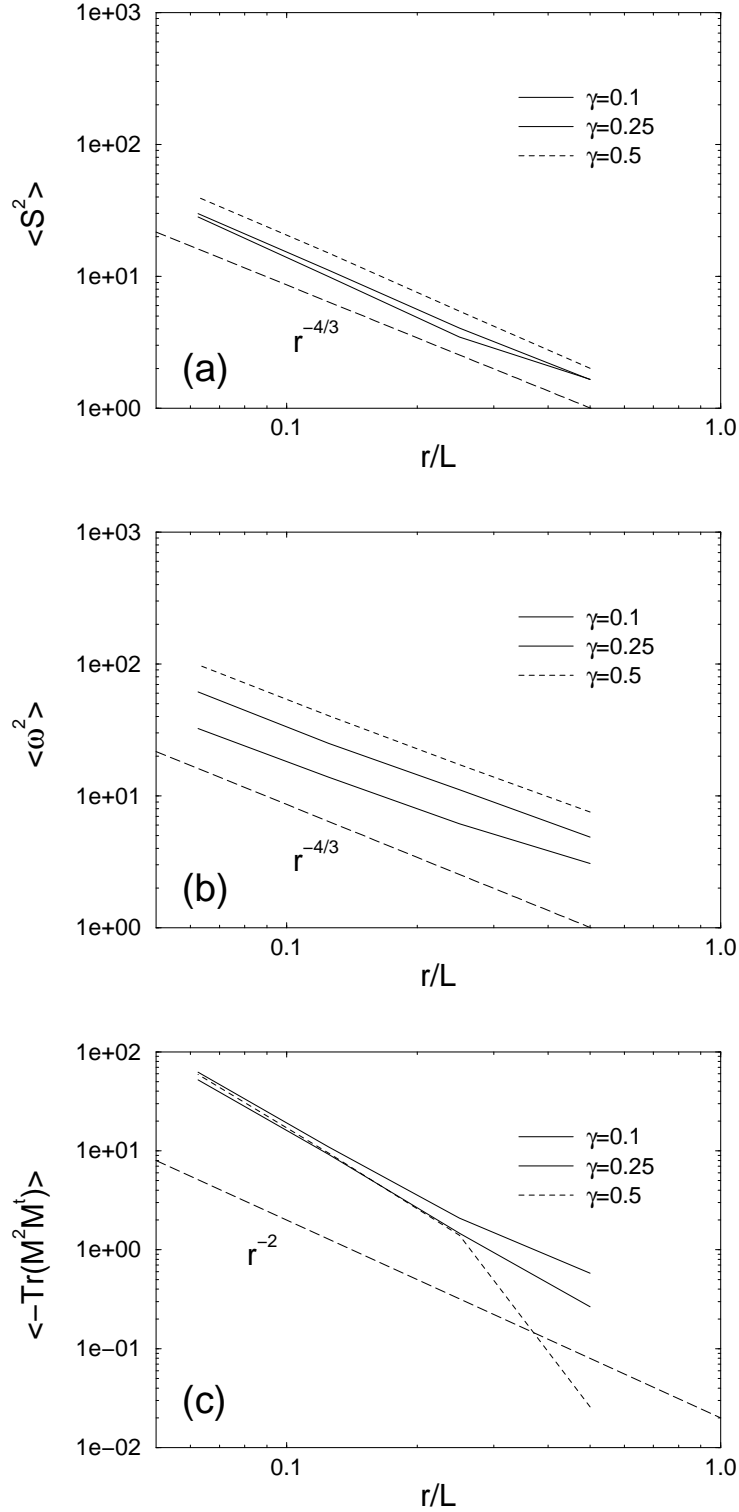


FIG. 4.7.: Loïs d'échelles des seconds moments (a) des déformations et (b) de la vorticité. (c) Loïs d'échelles du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ . Toutes ces loïs d'échelles sont représentées pour trois valeurs de  $\gamma$  ( $\alpha=0,4$ ,  $\beta=0,4$ ).

#### 4.4.2. Fonction distribution de probabilité dans le plan $(R, Q)$

On a vu en 4.4.1.1 que les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles les lois d'échelles de  $\langle Tr(S^2) \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$  et du transfert d'énergie  $\langle -r^2 Tr(M^2 M^t) \rangle$  sont en accord avec la DNS sont assez fortement contraintes. Un tel comportement se retrouve en étudiant les fonctions distributions de probabilité jointes  $P(R, Q)$ .

La figure 4.8 montre les distributions de probabilité calculées dans le plan  $(R, Q)$  pour  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ , à différentes échelles de longueur. La première remarque que l'on peut faire concerne l'accord qualitatif de ces courbes avec les mêmes quantités calculées par DNS. L'allure générale des PDF calculées dans l'approximation semi-classique est beaucoup plus proche des solutions de DNS que celle des PDF solutions de la partie déterministe du modèle (section 3.5). La vallée de faible probabilité dans la partie du plan  $D > 0$ ,  $R > 0$  a disparu, l'asymétrie de la distribution est beaucoup plus faible, comme c'est le cas en DNS et expérimentalement [8].

La figure 4.9 montre les distributions de probabilité calculées dans le plan  $(R, Q)$  pour les mêmes valeurs de  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ , mais pour une valeur plus petite de  $\alpha$  ( $\alpha=0,2$ ). La différence majeure avec les PDF calculées pour  $\alpha=0,6$  concerne la queue de la distribution : en effet, pour les petites valeurs de  $\alpha$  cette queue augmente démesurément le long de la séparatrice du côté  $R > 0$  (la ligne de discriminant nul est représentée en pointillés sur les figures 4.8 et 4.9). Pour des valeurs décroissantes de l'échelle cette queue s'accroît exagérément, beaucoup plus que ce qui est observé en DNS. Pour les plus grandes valeurs de  $\alpha$  la PDF n'est pas étirée le long de la séparatrice. On verra par la suite que cette différence explique la différence de comportement de la loi d'échelle de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  et du signe du transfert d'énergie pour des valeurs différentes de  $\alpha$ .

#### 4.4.3. Densités de quantités dynamiques dans le plan $(R, Q)$

Les figures 4.10 et 4.11 représentent les densités des quantités  $Tr(S^2)$ ,  $\omega^2$  (l'entrophie),  $\omega S \omega$  (la production d'entrophie),  $-r^2 Tr(M^2 M^t)$  (le transfert d'énergie) et  $-Tr(S^3)$  dans le plan  $(R, Q)$ , pour  $\alpha=0,5$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$  à deux échelles de longueur  $r=L/2$  et  $r=L/8$ . Ces densités n'ont pas une dépendance qualitative nette en fonction de  $r$ . Ces courbes peuvent être comparées aux résultats de DNS (voir annexe B).

Les différences principales qu'on peut noter sont les suivantes :

- La densité de  $Tr(S^2)$  calculée dans l'approximation semi-classique du modèle est un peu moins concentrée autour de l'origine que celle obtenue par DNS.
- La partie négative de  $\omega S \omega$  domine la partie positive, ce qui conduit globalement à une production d'entrophie moyenne négative . Ce résultat n'est pas physique, c'est le défaut majeur des solutions semi-classiques.

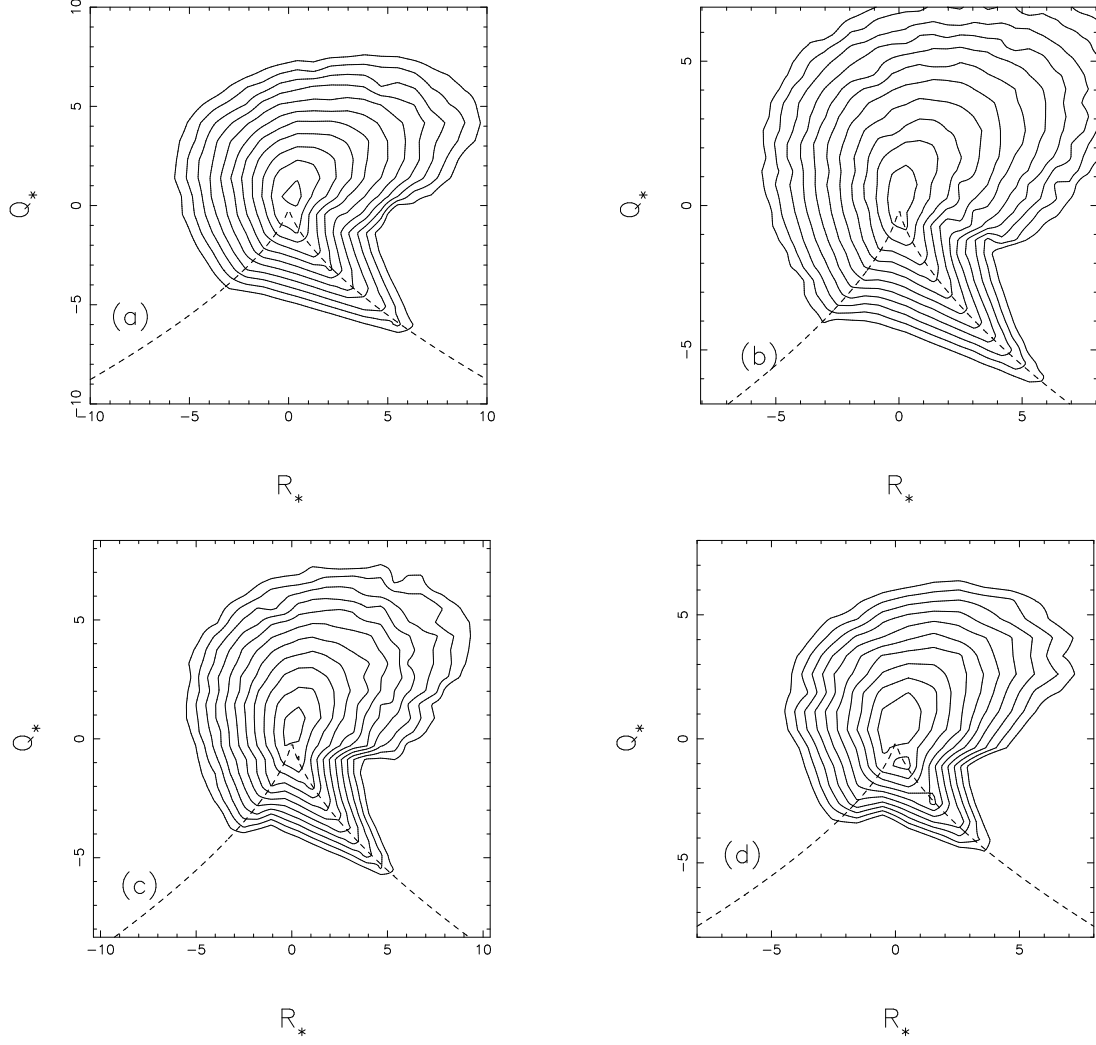


FIG. 4.8.: Distributions de probabilité jointes  $P(R_*, Q_*)$  calculées pour  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$  : (a)  $r=L/2$ , (b)  $r=L/4$ , (c)  $r=L/8$  et (d)  $r=L/16$ . Les quantités  $R_*$  et  $Q_*$  sont normalisées par la variance des déformations :  $Q_* = Q / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ ,  $R_* = R / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle^{3/2}$ . Les lignes d'isoprobabilité sont espacées logarithmiquement, et séparées de facteurs  $e$ .

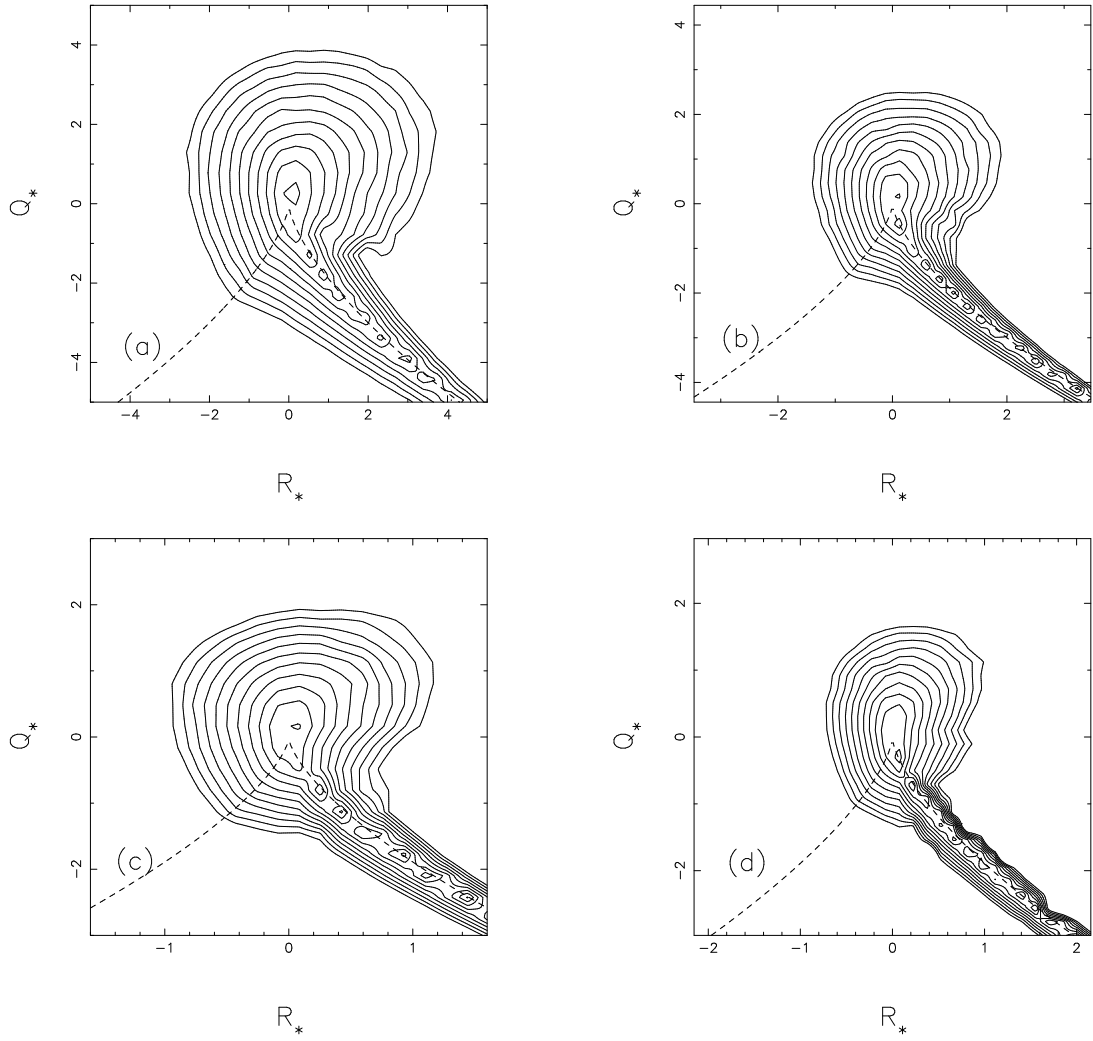


FIG. 4.9.: Distributions de probabilité jointes  $P(R_*, Q_*)$  calculées pour  $\alpha=0,2$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$  : (a)  $r=L/2$ , (b)  $r=L/4$ , (c)  $r=L/8$  et (d)  $r=L/16$ . La convention est la même que sur la figure 4.8.

À part ces quelques remarques, les densités de quantités dynamiques solutions semi-classiques du modèle sont globalement consistantes avec celles calculées par DNS. En particulier :

- L’ensrophie est concentrée dans la région  $D > 0$ , région dominée par les trajectoires tourbillonnantes.
- L’ensrophie est créée dans la partie du plan  $D > 0$ ,  $R < 0$ , et détruite dans la région  $D > 0$ ,  $R > 0$  : on retrouve donc le fait bien connu que l’ensrophie est majoritairement créée dans les filaments de vorticité et détruite dans les nappes de vorticité [18].
- La contribution majeure au flux d’énergie vient de la partie  $R > 0$  de la séparatrice. C’est une région dominée par les nappes, ce qui est cohérent avec les résultats de [30].
- On sait que :  $-Tr(M^2 M^t) = -Tr(S^3) + \frac{1}{4}\omega S\omega$  [31], où sont explicitement séparées les contributions des déformations et de la production d’ensrophie au transfert d’énergie. Les figures 4.10 et 4.11 montrent que la région qui contribue le plus au transfert d’énergie est la même que celle qui domine  $-Tr(S^3)$  ( $D \approx 0$  et  $R > 0$ ), région qui ne participe que très faiblement (en valeur absolue)   la production d’ensrophie. Du point de vue du transfert d’énergie, les régions actives semblent donc dominées par les déformations et pas par la vorticité. On peut faire la même constatation en DNS.

#### 4.4.4. Discussion

L’étude des solutions semi-classiques du modèle pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  a montré que le paramètre dont la valeur précise influence le plus la dynamique est  $\alpha$ .

On a ainsi remarqué que, pour les faibles valeurs de ce paramètre, la queue de la distribution  $P(R, Q)$  croît exagérément le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice. Ce résultat est consistant avec ceux de [8]. En effet, l’étirement de la PDF le long de la séparatrice s’interprète bien en terme de dynamique d’Euler Restreinte (RE) (voir le portrait de phase de cette dynamique, sur la figure A.2). Or, l’un des résultats majeurs de [8] est le fait que le tenseur des contraintes visqueuses tend à contrer le flot de la dynamique RE dans cette partie du plan  $(R, Q)$  (ce qui prévient la formation de la singularité à temps fini de RE). Dans notre modèle, le terme en  $\alpha$  mesure l’amplitude de la dissipation (voir 3.2). Le fait qu’une valeur suffisamment grande de  $\alpha$  soit nécessaire pour réduire suffisamment l’étirement de la PDF le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice est donc un résultat consistant avec [8].

L’autre effet marquant du comportement des solutions semi-classiques du modèle lorsque  $\alpha$  varie est le fait que  $\langle Tr(S^2) \rangle$  croît trop vite quand l’échelle  $r$  diminue pour les petites valeurs de  $\alpha$  et que le transfert d’énergie  $\langle -r^2 Tr(M^2 M^t) \rangle$  est négatif pour les grandes valeurs de  $\alpha$  (voir figure 4.5). Or, la densité de  $Tr(S^2)$  est en grande partie

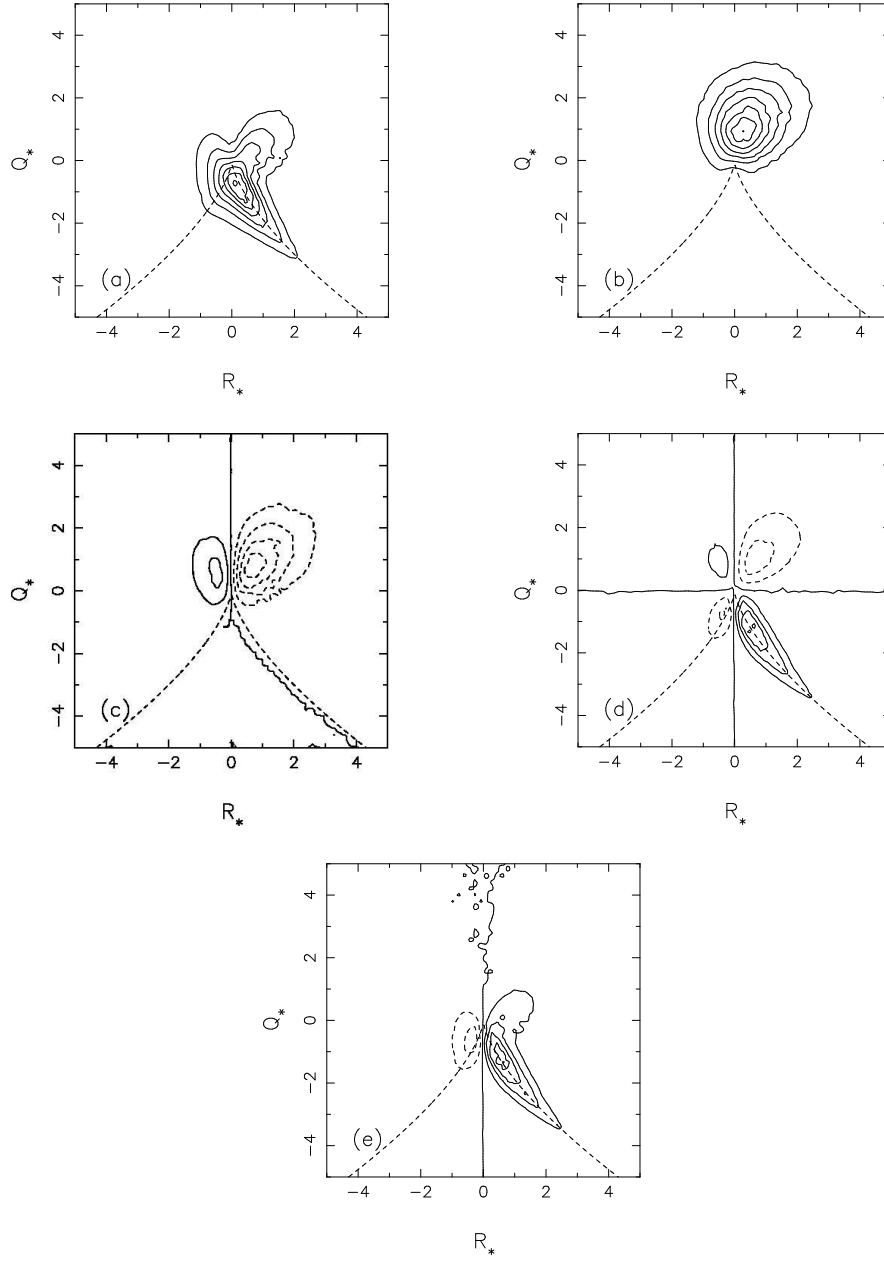


FIG. 4.10.: Densités de (a)  $Tr(S^2)$ , (b) enstrophie  $\omega^2$ , (c) production d'enstrophie  $\omega S \omega$ , (d) transfert d'énergie  $\langle -r^2 Tr(M^2 M^t) \rangle$  et (e)  $-Tr(S^3)$  dans le plan  $(R_*, Q_*)$ , pour  $r=L/2$ ,  $\alpha=0,5$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ . Les lignes solides correspondent aux valeurs positives, les lignes en pointillés aux valeurs négatives.

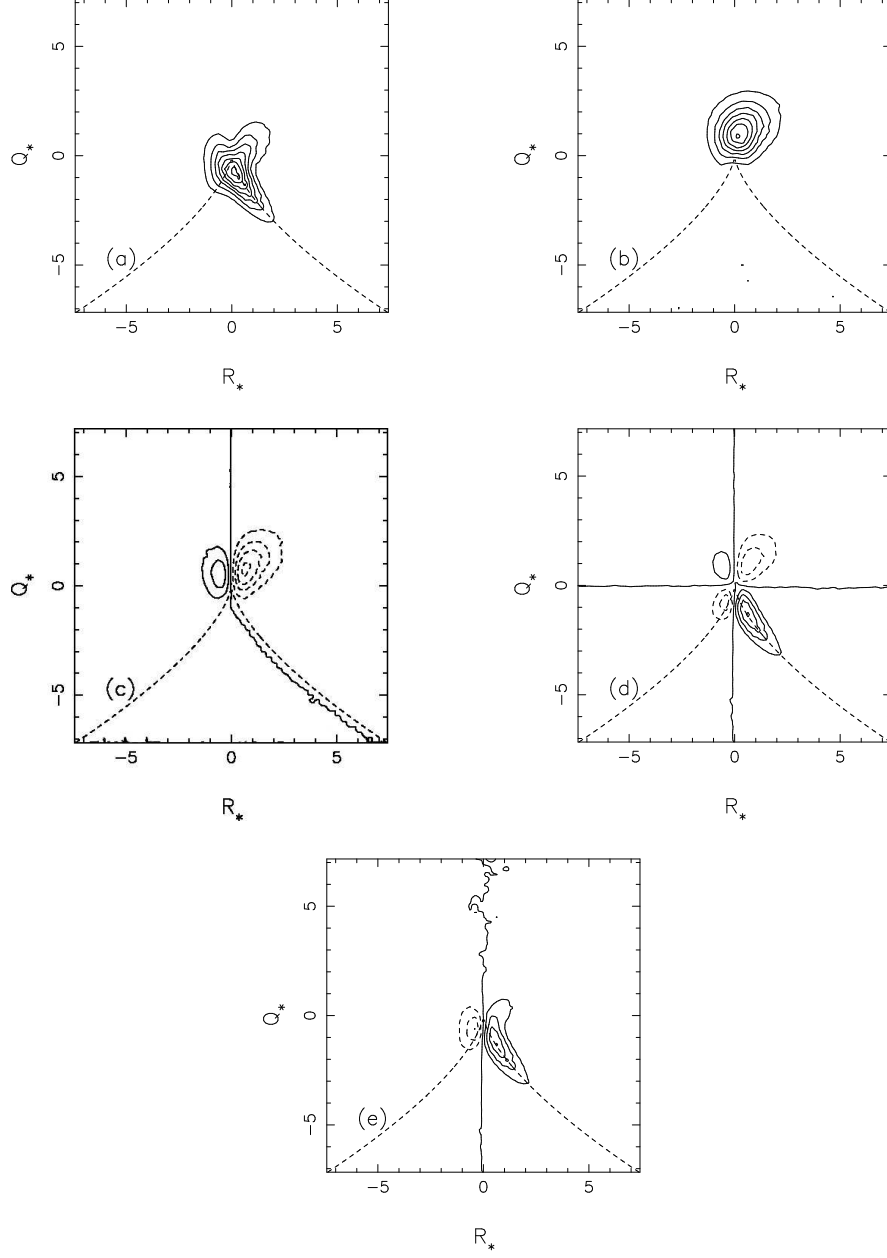


FIG. 4.11.: Densités de (a)  $\text{Tr}(S^2)$ , (b) enstrophie  $\omega^2$ , (c) production d'enstrophie  $\omega S \omega$ , (d) transfert d'énergie  $-r^2 \text{Tr}(M^2 M^t)$  et (e)  $-\text{Tr}(S^3)$  dans le plan  $(R_*, Q_*)$ , pour  $r=L/8$ ,  $\alpha=0,5$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ . La convention est la même que sur la figure 4.10.

concentrée le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice, là où est également concentrée la majeure partie de la partie positive de  $\langle -r^2 \text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  (voir figures 4.10 et 4.11). Or on a vu que, pour les petites valeurs de  $\alpha$ ,  $P(R, Q)$  est fortement surestimée dans cette partie du plan  $(R, Q)$ , et que cette surestimation empire lorsque  $r$  diminue. Donc, pour de petites valeurs de  $\alpha$ , la queue de  $P(R, Q)$  (en  $D \approx 0$ ,  $R > 0$ ) croît trop vite quand  $r$  diminue, ce qui conduit à une augmentation trop rapide de  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$  à petite échelle, tandis que pour les grandes valeurs de  $\alpha$  la contribution de cette partie du plan est trop faible, et le transfert d'énergie moyen devient négatif.

## 4.5. Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté une méthode de résolution approchée du modèle du tétraèdre, dans laquelle on effectue une double approximation du col : on ne considère que la réalisation des bruits la plus probable (approximation semi-classique), et les conditions initiales pour lesquelles la PDF résultante est maximale. Pour des raisons de convergence numérique, nous n'avons pas pu appliquer cette méthode au modèle du tétraèdre dans sa version initiale, mais nous avons considéré à la place une version simplifiée de ce modèle, dans laquelle une partie des bruits est traitée en champ moyen. Le modèle résultant dépend de trois paramètres sans dimension. Nous en avons étudié qualitativement et quantitativement les solutions, dans l'approximation semi-classique, en fonction de ces trois paramètres. Celui dont la valeur précise influence le plus les solutions est  $\alpha$ , qui mesure la réduction de non-linéarité (reliée à la dissipation). Pour un intervalle de valeurs de  $\alpha$  ( $0,4 \lesssim \alpha \lesssim 0,5$ )<sup>4</sup>, les solutions semi-classiques du modèle reproduisent de nombreux comportements observés par DNS : les quantités  $\text{Tr}(S^2)$ ,  $\omega^2$  et  $\langle -r^2 \text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  (le transfert d'énergie) vérifient le scaling K41, et les distributions de probabilité  $P(R, Q)$  présentent un accord qualitatif acceptable avec celles obtenues par DNS ou expérimentalement [8].

Mais ces solutions semi-classiques présentent également un inconvénient important : la partie  $Q > 0$ ,  $R > 0$  de la PDF  $P(R, Q)$  est légèrement surestimée pour toutes les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Ceci conduit à une production d'enstrophie moyenne  $\langle \omega S \omega \rangle$  négative (voir figures 4.10 et 4.11). La méthode de résolution du modèle utilisée dans ce chapitre doit donc être améliorée. Comme on le verra au chapitre suivant, cette première approche nous a permis d'élaborer un schéma de résolution du système (S.4) dans lequel les bruits sont traités plus rigoureusement.

---

<sup>4</sup>Ces valeurs de  $\alpha$  sont compatibles avec celles reportées précédemment [7, 26].





## 5. Résolution du modèle par un schéma de type Monte-Carlo

On a introduit au chapitre précédent le système (S.4), qui possède 9 degrés de liberté (en terme de bruits) de moins que le système (S.3). Cependant, le nombre de degrés de liberté de (S.4) reste trop élevé pour qu'une résolution de ce système par une approche de type Monte-Carlo directe soit envisageable. Comme on va le voir dans ce chapitre, la résolution du modèle (S.4) dans l'approximation semi-classique effectuée au chapitre précédent nous a en revanche permis d'élaborer un schéma de type Monte-Carlo approprié au problème. Ce schéma est décrit en 5.1. La section 5.2 présente les solutions du modèle calculées par cette méthode. Les conclusions de cette analyse sont données en 5.3.

### 5.1. Description et justification de la méthode

La méthode étudiée au chapitre précédent consiste à ne considérer que la réalisation des bruits la plus probable (ce qui laisse par ailleurs  $\frac{dM}{dt}$  indéterminé à l'instant initial). Mais on a aussi vu en 4.1.2 qu'en fixant les valeurs de  $Q$ ,  $R$  et  $r$  dans la gamme inertielle il restait trois paramètres pour définir  $M$  : les composantes de la vorticit   initiale. On doit en principe int  grer la PDF sur ces trois composantes. Le calcul de cette int  grale a   t   effectu   au chapitre pr  c  dent en utilisant l'approximation du col.

Le sch  ma num  rique de r  solution du mod  le le plus pr  cis (en principe exact) consisterait    appliquer deux algorithmes de type Monte-Carlo successifs :

- un sur les r  alisations du bruit    chaque pas de temps,    valeurs fix  es des composantes de la vorticit      l'instant initial. On a ainsi une fonction  $f$  de trois variables, qui associe    la vorticit   initiale la PDF associ  e  $P(M, g)$
- l'autre sur les valeurs de cette vorticit       $t = 0$ , pour calculer l'int  grale de la PDF sur  $\vec{\omega}$

Ainsi, si on note  $N_{bruit}$  et  $N_{vort}$  les nombres de r  alisations respectifs de ces deux proc  dures, on devrait effectuer au total  $N_{bruit} \times N_{vort}$  r  alisations pour chaque valeur de  $(Q, R, r)$ . Pour avoir une bonne convergence num  rique, on doit choisir  $N_{bruit} \gtrsim 10^4 - 10^5$  et  $N_{vort} \gtrsim 10^3 - 10^4$ , soit  $N_{bruit} \times N_{vort} \gtrsim 10^9$  dans certains cas, ce qui

est prohibitif en temps de calcul. Pour réduire ce temps de calcul, on peut appliquer une procédure de type Monte-Carlo pour tenir compte de l'effet du bruit, et utiliser l'approximation du col pour calculer l'intégrale de la PDF sur la vorticité initiale. On peut déjà avoir une idée de la pertinence de cette dernière approximation en étudiant les résultats semi-classiques. Sur la figure 5.1 est représentée la PDF calculée dans l'approximation semi-classique en fonction des composantes de la vorticité initiale, au voisinage du point col. Les trois fonctions tracées sont clairement convexes : l'approximation du col pour calculer l'intégrale de la PDF sur les valeurs de la vorticité initiale semble donc parfaitement justifiée.

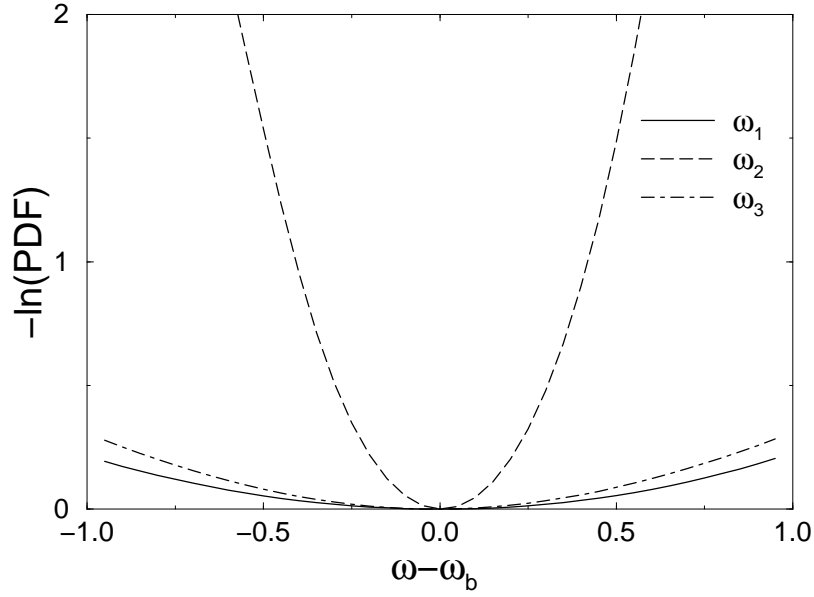


FIG. 5.1.: *Dépendance du logarithme de la PDF calculée dans l'approximation semi-classique en fonction des trois composantes de la vorticité initiale, au voisinage du point col (qui est ici un minimum car on a tracé l'opposé de la PDF). Ici  $\alpha=0,4$ ,  $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ,  $r=L/8$ ,  $Q=-20$  et  $R=-30$ , mais ce comportement est le même pour toutes les valeurs de ces paramètres que l'on a considérées.  $\omega_b$  est dans chaque cas la valeur optimale calculée.*

C'est pourquoi nous avons dans un second temps considéré le schéma de résolution suivant :

- les bruits sont traités par Monte-Carlo
- l'intégrale sur la vorticité initiale est calculée en utilisant l'approximation du col

Après avoir proposé ce schéma, nous avons vérifié que la fonction  $f$  qui associe aux composantes de la vorticité initiale l'opposé du logarithme de la PDF  $P(M, g)$ ,

calculée par Monte-Carlo, était également convexe. Cette propriété étant toujours vérifiée, le calcul de l'intégrale sur la vorticité par approximation du col est définitivement justifiée. Contrairement à l'approximation semi-classique étudiée au chapitre précédent, cette approximation est donc contrôlée.

La convexité de  $f$ , et donc le fait que cette fonction ne possède qu'un seul minimum, nous a également permis de réaliser l'optimisation résultante grâce à l'algorithme amoeba, beaucoup moins coûteux en temps de calcul que ameba (voir annexe C). Les paramètres d'optimisation que nous avons utilisés sont les suivants : pour chaque valeur de  $(Q, R, r)$ , on considère un simplexe initial régulier de taille caractéristique 0,2. L'algorithme suppose qu'un minimum est détecté lorsque la différence relative entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction aux sommets du simplexe est inférieure à 0,03. Le calcul de la fonction à minimiser  $f$ , effectué par Monte-Carlo, a été fait en considérant  $4.10^4$  réalisations du bruit.   cause de limitations en temps de calcul, il nous a pour l'instant été impossible d'aller au-delà de cette valeur. Comme on le verra par la suite, elle n'est pas toujours suffisante pour permettre d'interpréter avec certitude les résultats d'un point de vue quantitatif, en particulier aux plus petites échelles considérées. Cependant, cette première approche donne plusieurs renseignements intéressants sur un plan semi-quantitatif.

Dans la section suivante sont présentées les solutions du modèle (S.4) calculées par cette méthode, qu'on qualifiera par la suite de Monte-Carlo, même s'il faut garder en mémoire qu'elle contient une approximation, et que ces résultats sont préliminaires.

## 5.2. Résultats

On rappelle que le modèle (S.4) dépend des trois paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . On se propose ici d'étudier les solutions de ce système calculées par la méthode présentée dans la section précédente en fonction de ceux-ci. Ces solutions peuvent être comparées aux résultats de DNS montrés en annexe B, mais aussi aux solutions semi-classiques du modèle (voir section 4.4).

Comme constaté dans l'approche semi-classique (chapitre 4), on va voir que le paramètre qui joue le rôle le plus significatif dans la détermination des solutions semble être  $\alpha$ . Mais les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles ces solutions présentent un accord qualitatif acceptable avec la DNS ne seront pas les mêmes que celles obtenues dans l'approche semi-classique. Nos premiers résultats montreront également une autre différence majeure entre les solutions MC et celles SC : les premières sembleront en effet également dépendre des valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$ . Comme en 4.4, on présente les distributions de probabilité jointes  $P(R, Q)$ , des densités de quantités physiques dans le plan  $(R, Q)$  et les lois d'échelles de quelques-unes de ces quantités. Des limitations en temps de calcul ne nous ont pas permis de calculer les solutions du modèle à des échelles plus petites que  $L/8$ . Les lois d'échelles que nous présenterons plus

loin peuvent être discutables, mais les solutions présentées ici sont suffisantes pour éclaircir de nombreux points.

### 5.2.1. Fonction distribution de probabilité dans le plan $(R, Q)$

La figure 5.2 présente les distributions de probabilité jointes  $P(R, Q)$  solutions du modèle pour  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ , à trois échelles de longueur différentes. Les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont les mêmes que sur la figure 4.8. Le résultat le plus marquant est le fait que les distributions calculées par Monte-Carlo (MC) présentent un étirement le long de la partie  $R > 0$  de la séparatrice, de plus en plus prononcé quand l'échelle diminue. Un tel comportement s'observe sur les solutions semi-classiques (SC) pour des valeurs plus faibles de  $\alpha$ . La figure 5.2 peut donc en fait être comparée à la figure 4.9 (solution SC avec  $\alpha=0,2$ ).

Sur la figure 5.3 sont représentées les distributions  $P(R, Q)$  solutions MC du modèle pour les mêmes valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  mais pour  $\alpha=0,8$ . Dans ce cas les PDF ne sont plus étirées le long de la séparatrice. Les courbes présentent un bon accord qualitatif avec la DNS (figure B.2). En particulier, contrairement aux solutions SC, les PDF calculées par MC ne sont pas surestimées dans la partie  $Q > 0$ ,  $R > 0$ .

Globalement, les solutions MC présentent donc, comme les solutions SC, une « transition » en fonction du paramètre  $\alpha$  : pour les faibles valeurs de celui-ci, les PDF sont fortement étirées le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice (de plus en plus quand  $r$  diminue), tandis que pour les grandes valeurs de  $\alpha$  cet étirement disparaît. Mais la valeur de  $\alpha$  pour laquelle se produit cette transition est supérieure pour les solutions MC.

Mis à part cette différence, les distributions  $P(R, Q)$  calculées par MC présentent un meilleur accord avec les solutions de DNS : la contribution du quart de plan  $Q > 0$ ,  $R > 0$  n'est plus surestimée par rapport à celle de la partie  $Q > 0$ ,  $R < 0$ . Cette remarque est importante car, à cause de cet inconvénient, les solutions SC présentaient une production d'entrophie moyenne négative. On verra dans la sous-section suivante que ce problème est corrigé par la méthode de résolution par MC.

Comme celles calculées par la méthode SC, les PDF calculées par MC ne présentent pas de dépendance qualitative évidente par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$ .

### 5.2.2. Densités de quantités dynamiques dans le plan $(R, Q)$

Sur la figure 5.4 sont représentées les densités dans le plan  $(R, Q)$  de  $Tr(S^2)$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega S\omega$ ,  $-r^2 Tr(M^2 M^t)$  et  $-Tr(S^3)$  pour  $\alpha=0,8$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ , à une échelle  $r=L/2$ .

L'avantage majeur des densités calculées par MC, comparées à celles calculées par SC (figures 4.10 et 4.11) est le fait que la partie positive de la production d'entrophie

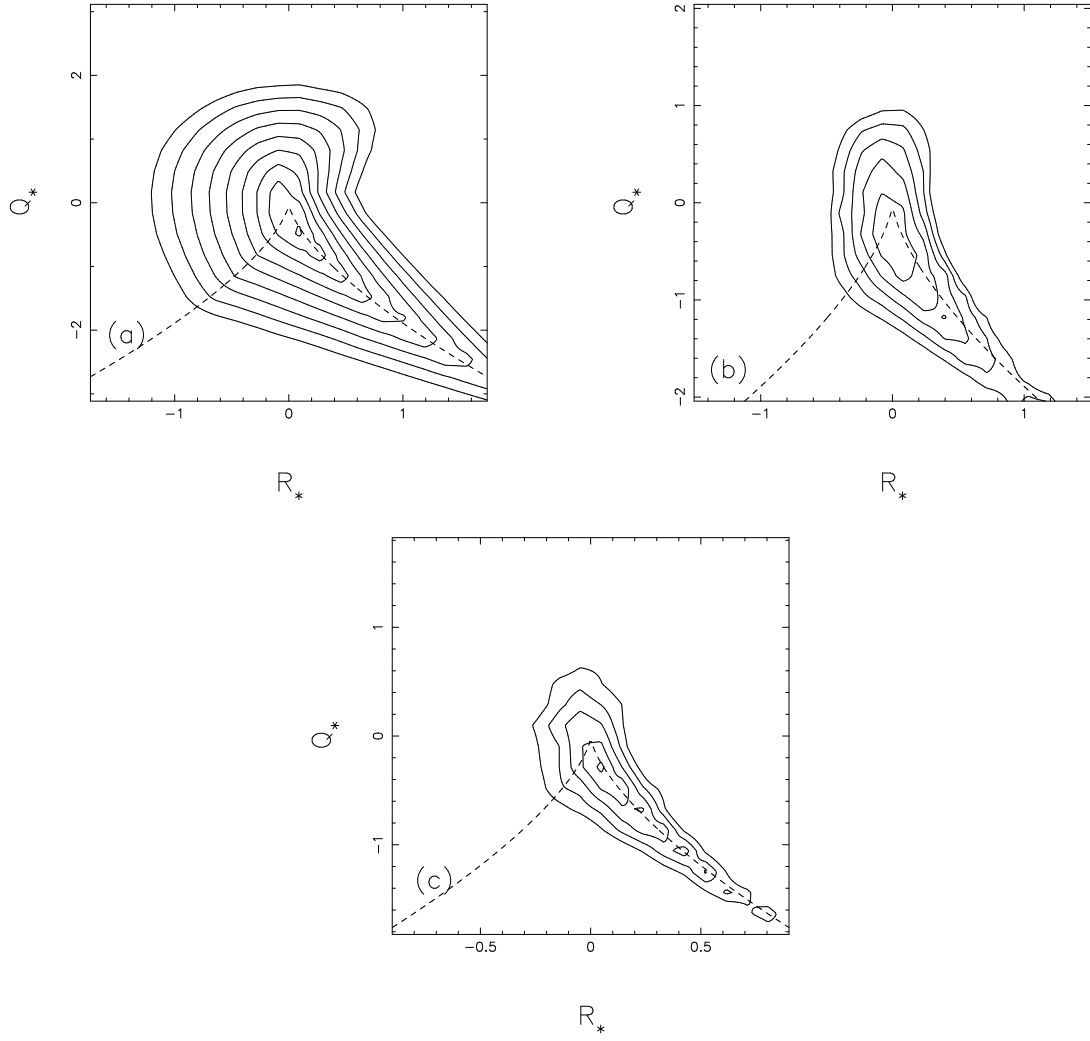


FIG. 5.2.: Distributions de probabilité jointes  $P(R_*, Q_*)$  calculées pour  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$  : (a)  $r=L/2$ , (b)  $r=L/4$  et (c)  $r=L/8$ . Les quantités  $R_*$  et  $Q_*$  sont normalisées par la variance des déformations :  $Q_* = Q / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ ,  $R_* = R / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle^{3/2}$ . Les lignes d'isoprobabilité sont espacées logarithmiquement, et séparées de facteurs  $e$ .

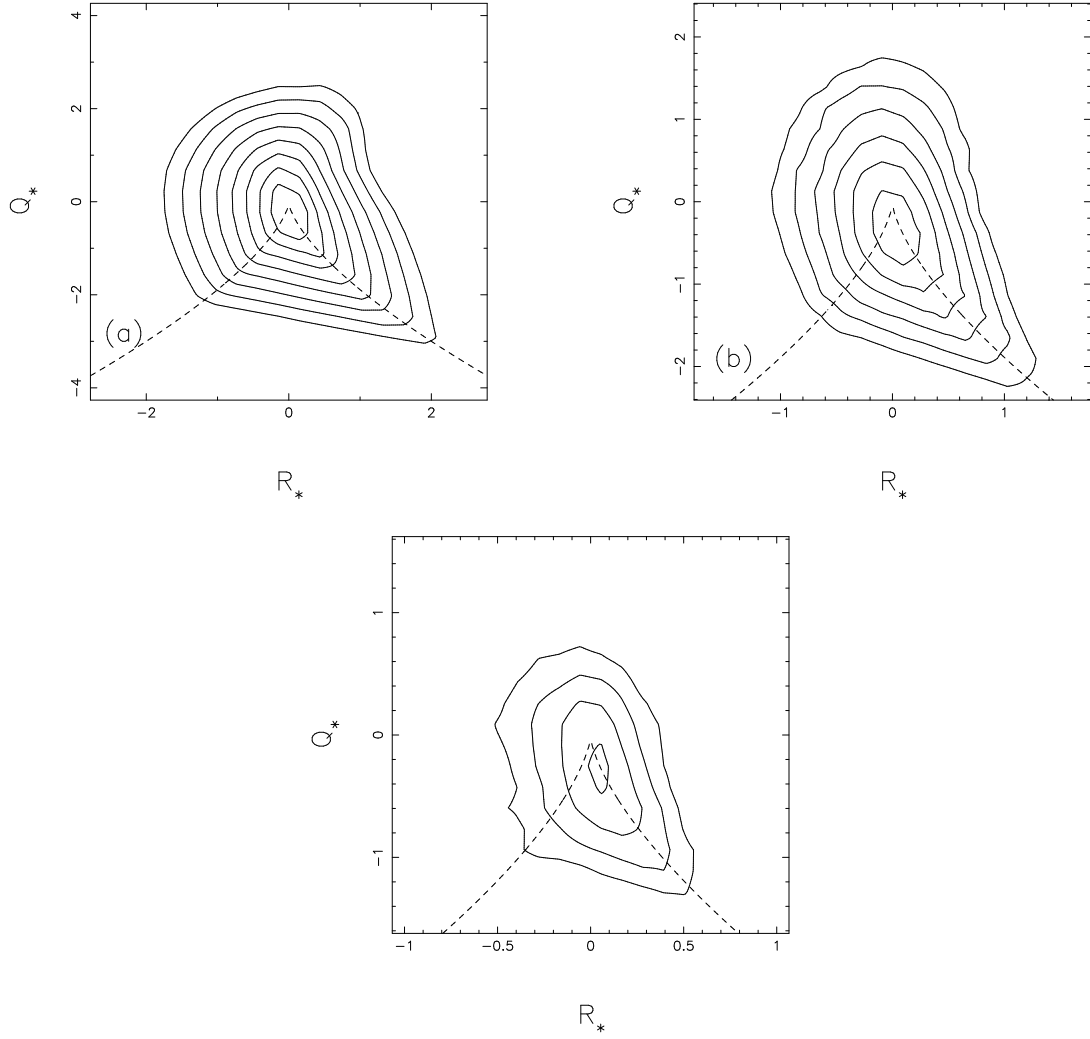


FIG. 5.3.: Distributions de probabilité jointes  $P(R_*, Q_*)$  calculées pour  $\alpha=0,8$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$  : (a)  $r=L/2$ , (b)  $r=L/4$  et (c)  $r=L/8$ . La convention est la même que sur la figure 5.2.

$\omega S\omega$  domine la partie négative. Dans ce cas, la production d'enstrophie moyenne est donc positive comme ce doit être le cas.

### 5.2.3. Lois d'échelles

On présente ici les lois d'échelles des solutions MC. Les barres d'erreurs, non représentées sur les figures pour ne pas les alourdir, sont plus grandes que celles des lois d'échelles SC montrées au chapitre précédent. Les lois d'échelles sont ici calculées pour trois valeurs de  $r$ . On montre leur dépendance par rapport aux trois paramètres dont dépend le modèle.

#### 5.2.3.1. Dépendance en fonction de $\alpha$

Sur la figure 5.5 sont représentées les lois d'échelles de la variance des déformations  $\langle Tr(S^2) \rangle$ , de l'enstrophie  $\langle \omega^2 \rangle$ , de la production d'enstrophie  $\langle \omega S\omega \rangle$  et du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ ,  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ , avec  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ .

Pour  $\alpha=0,5$ ,  $\langle Tr(S^2) \rangle$  vérifie le scaling K41. Pour des valeurs croissantes de  $\alpha$ , l'exposant de la loi d'échelle de cette quantité s'écarte de la valeur de  $-4/3$ , prédite par K41 et vérifiée par les résultats de DNS.

Les cas de l'enstrophie et de sa production sont plus difficiles à interpréter. En effet, il semble que ces deux quantités soient soumises à un transitoire à grande échelle. Leurs lois d'échelles ne peuvent donc être discutées qu'en considérant deux valeurs de l'échelle :  $r=L/4$  et  $L/8$ . Avec cette contrainte, il semble que, comme pour les solutions SC, la dépendance de l'enstrophie en fonction de  $r$  soit correcte quel que soit  $\alpha$ . La production d'enstrophie semble vérifier à peu près le scaling K41 seulement pour les petites valeurs de  $\alpha$ .

Comme la variance des déformations, le transfert d'énergie vérifie K41 pour  $\alpha=0,5$ , mais pas pour les plus grandes valeurs de celui-ci.

#### 5.2.3.2. Dépendance en fonction de $\beta$

La figure 5.6 montre la dépendance en fonction de l'échelle de  $\langle Tr(S^2) \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$ ,  $\langle \omega S\omega \rangle$  et  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  pour  $\alpha=0,8$  et  $\gamma=0,25$ , pour trois valeurs de  $\beta$ .

Comme dans l'approximation SC, les lois d'échelles de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  et  $\langle \omega^2 \rangle$  ne dépendent pas de  $\beta$ .

En ne considérant que les valeurs de  $r$  égales à  $L/4$  et  $L/8$ , la production d'enstrophie semble vérifier à peu près K41 pour  $\beta=0,2$  mais pas pour les plus grandes valeurs de ce paramètre.



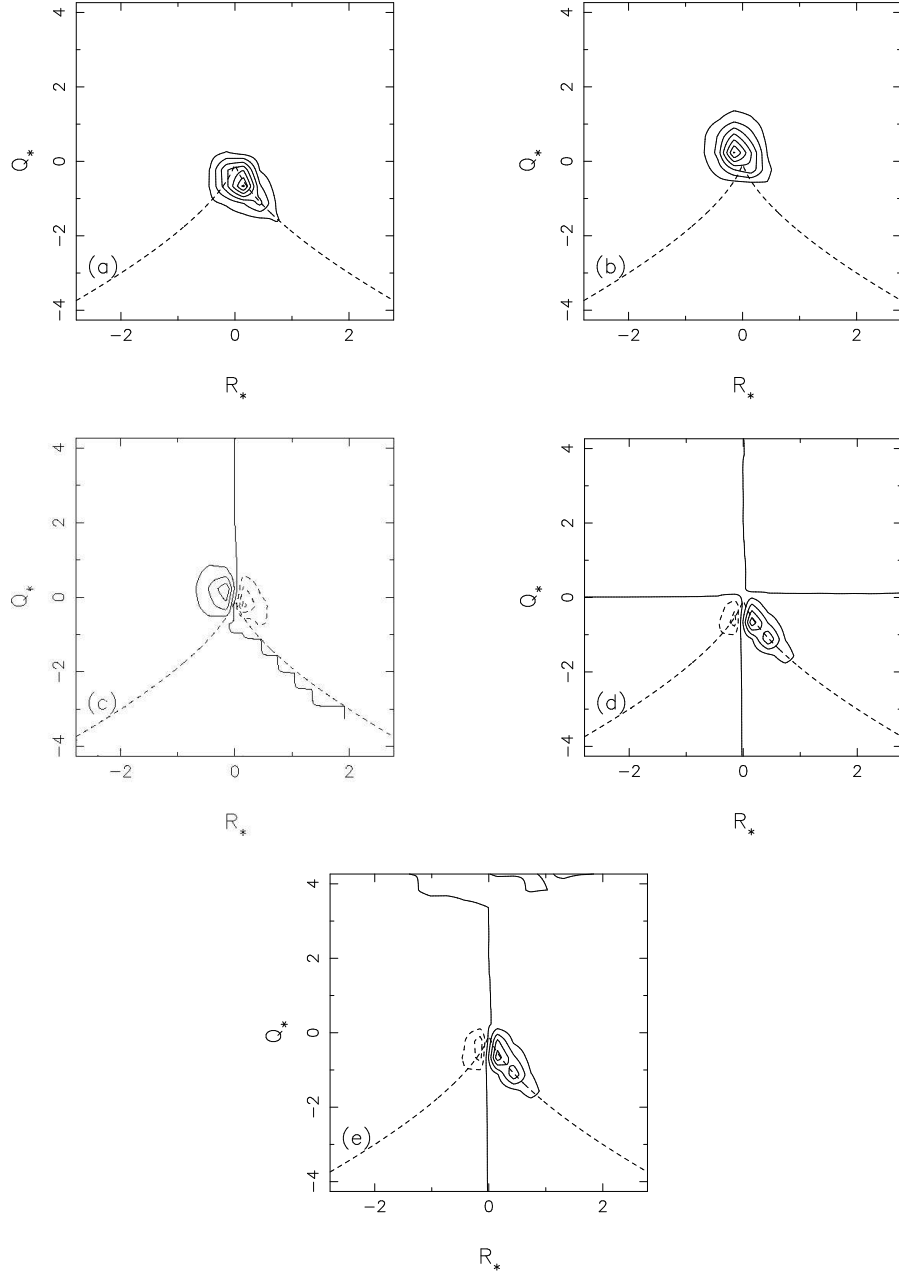


FIG. 5.4.: Densités de (a)  $\text{Tr}(S^2)$ , (b) enstrophie  $\omega^2$ , (c) production d'enstrophie  $\omega S \omega$ , (d) transfert d'énergie  $-r^2 \text{Tr}(M^2 M^t)$  et (e)  $-\text{Tr}(S^3)$  dans le plan  $(R_*, Q_*)$ , pour  $r=L/2$ ,  $\alpha=0,8$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ . Les lignes solides correspondent aux valeurs positives, les lignes en pointillés aux valeurs négatives.

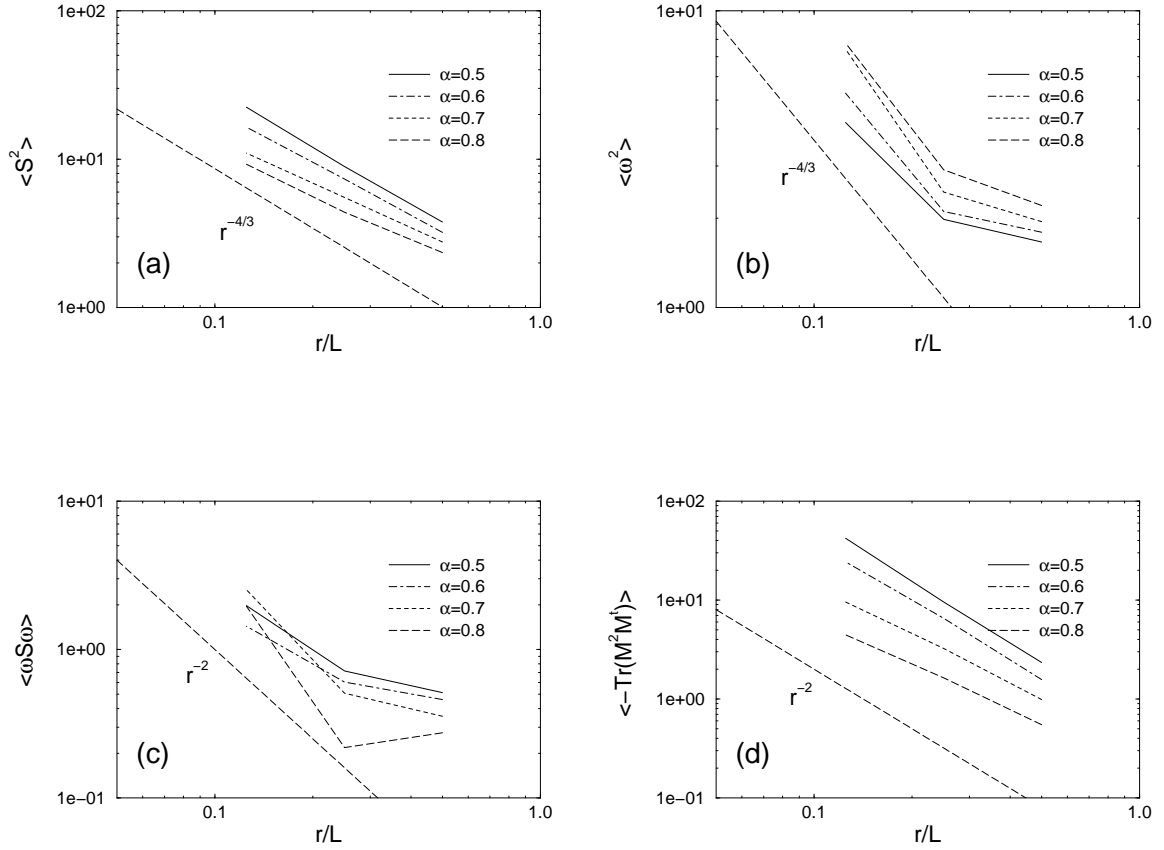


FIG. 5.5.: Lois d'échelles de (a)  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ , (b)  $\langle \omega^2 \rangle$ , (c)  $\langle \omega S \omega \rangle$  et (d)  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  ( $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ ). Les droites de pentes  $-4/3$  et  $-2$  servent de guides pour l'œil.

Par contre, les exposants des lois d'échelles de  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  sont en meilleur accord avec la prédiction de Kolmogorov (et les résultats de DNS) pour les plus grandes valeurs de  $\beta$  considérées :  $\beta=0,4$  et  $0,6$ .

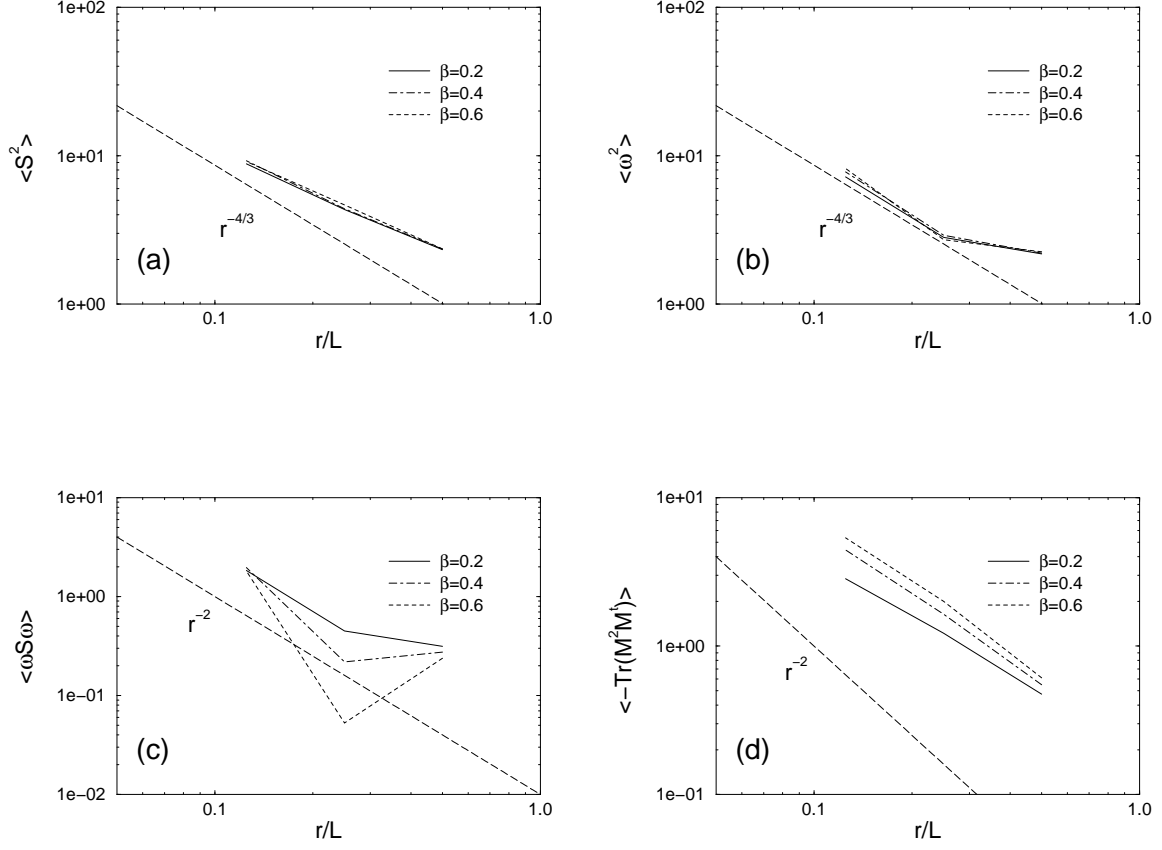


FIG. 5.6.: Lois d'échelles de (a)  $\langle Tr(S^2) \rangle$ , (b)  $\langle \omega^2 \rangle$ , (c)  $\langle \omega S \omega \rangle$  et (d)  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  pour trois valeurs de  $\beta$  ( $\alpha=0,8$ ,  $\gamma=0,25$ ). Les droites de pentes  $-4/3$  et  $-2$  servent de guides pour l'œil.

### 5.2.3.3. Dépendance en fonction de $\gamma$

Les lois d'échelles de  $\langle Tr(S^2) \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$ ,  $\langle \omega S \omega \rangle$  et  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  pour  $\alpha=0,8$ ,  $\beta=0,4$  et deux valeurs de  $\gamma$  sont représentées sur la figure 5.7. Avant de décrire celle-ci, on doit préciser que l'erreur sur les points calculés pour  $r=L/8$  et  $\gamma=0,5$  est plus grande que sur les autres.

Contrairement au cas des solutions SC du modèle, les solutions MC semblent indiquer une dépendance des lois d'échelles en fonction de  $\gamma$ . Ainsi, les dépendances

de  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$  et  $\langle \omega S \omega \rangle$  en fonction de  $r$  sont en meilleur accord avec la prévision K41 pour  $\gamma=0,5$  que pour  $\gamma=0,25$ . Les deux lois d'échelles de l'enstrophie semblent vérifier le scaling K41 (sur les deux plus petites valeurs de  $r$  considérées, après le transitoire à grande échelle). Le cas du transfert d'énergie est plus difficile à interpréter.

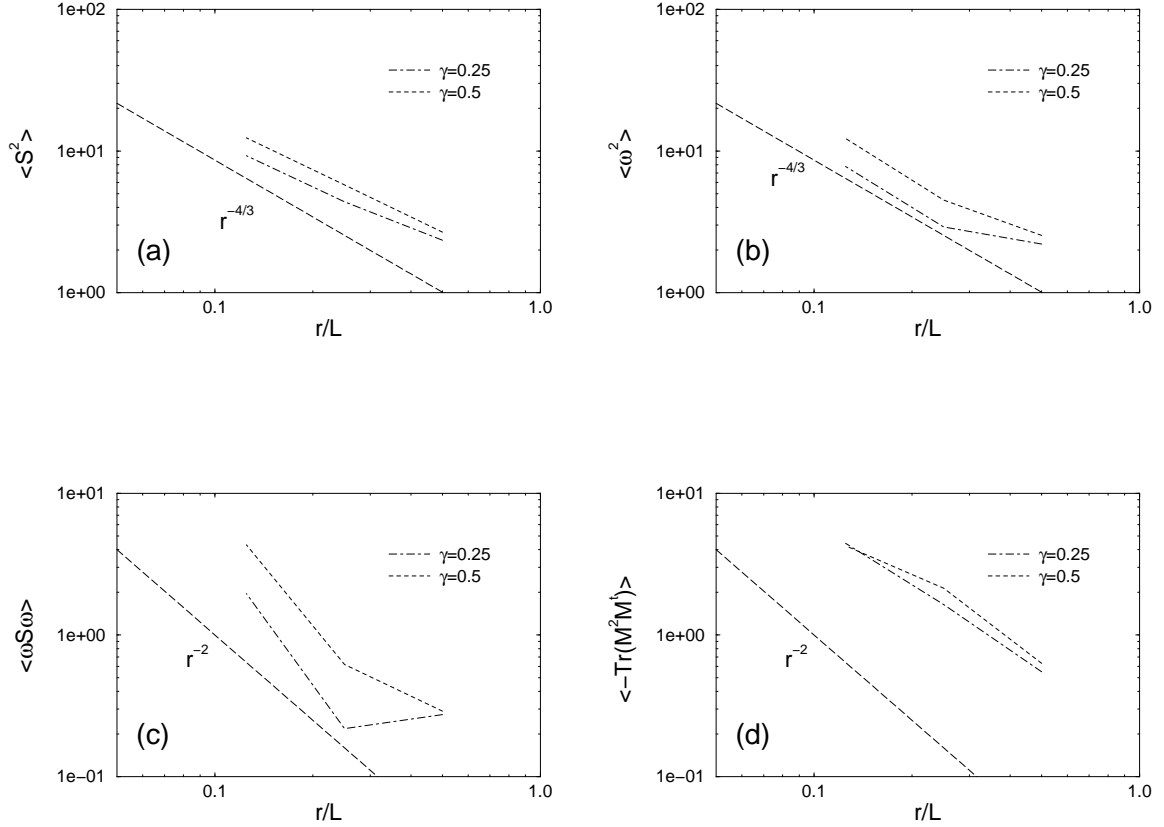


FIG. 5.7.: Lois d'échelles de (a)  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ , (b)  $\langle \omega^2 \rangle$ , (c)  $\langle \omega S \omega \rangle$  et (d)  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  pour deux valeurs de  $\gamma$  ( $\alpha=0,8$ ,  $\beta=0,4$ ). Les droites de pentes  $-4/3$  et  $-2$  servent de guides pour l'œil.

### 5.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons essayé de résoudre le modèle du tétraèdre par une méthode de type Monte-Carlo, où les bruits sont traités de façon plus rigoureuse que dans l'approximation semi-classique. Malheureusement, des limitations en temps de

calcul ne nous ont pas permis d'obtenir des résultats aussi précis que ce qu'il est en principe possible d'avoir. Mais les résultats préliminaires présentés ici sont suffisants pour une interprétation semi-quantitative.

En particulier, les distributions de probabilité dans le plan  $(R, Q)$  calculées par cette méthode présentent le même type de transition en fonction de  $\alpha$  que celles obtenues grâce à l'approximation semi-classique. Ainsi, pour les faibles valeurs de  $\alpha$  ces distributions sont exagérément étirées le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice, cet étirement augmentant pour des valeurs décroissantes de l'échelle de longueur considérée. Ce phénomène disparaît également pour les plus grandes valeurs de  $\alpha$ . Cependant la valeur de  $\alpha$  pour laquelle le changement de comportement se produit est supérieure pour les solutions MC : la « valeur critique » de  $\alpha$  est alors de l'ordre de 0,7 au lieu de 0,4 pour les solutions SC.

Les densités dans le plan  $(R, Q)$  des quantités physiques considérées présentent un bon accord qualitatif avec celles calculées par DNS. Contrairement aux résultats de l'approche SC, la production d'entrophie moyenne calculée par MC est bien positive.

Les lois d'échelles sont plus difficiles à interpréter, car nous avons pu calculer les solutions MC pour trois échelles de longueur seulement, mais aussi parce qu'il est difficile d'estimer l'incertitude de ces lois. Les résultats préliminaires que nous avons présentés semblent pourtant indiquer que :

- Les lois d'échelles sont en meilleur accord avec la prédiction de Kolmogorov et les solutions de DNS pour les petites valeurs de  $\alpha$ . Ce résultat est surprenant car les distributions de probabilité jointes de  $Q$  de  $R$  présentent un meilleur accord avec la DNS pour les grandes valeurs de  $\alpha$ . Il semble donc pertinent d'étudier plus précisément le comportement des solutions pour des valeurs intermédiaires de ce paramètre.
- L'entrophie et sa production subissent un transitoire à grande échelle, pour toutes les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  considérées.
- Les lois d'échelles de certaines grandeurs semblent dépendre de  $\beta$  et  $\gamma$ .

Pour confirmer ces trois remarques, il nous faudra cependant augmenter le nombre de réalisations du bruit dans la procédure de Monte-Carlo.

## 6. Application à la turbulence sous cisaillement

Nous avons jusqu'ici étudié le modèle du tétraèdre en supposant l'écoulement turbulent homogène et isotrope. Mais l'un des principaux avantages de ce modèle est qu'il est possible de l'adapter à toutes sortes d'écoulements, en changeant seulement la condition de bord, à grande échelle. Ce chapitre présente les solutions du modèle lorsque l'on superpose au forçage un cisaillement pur. On présente brièvement en 6.1 les motivations de l'étude de la turbulence sous cisaillement ainsi que l'état de l'art dans ce domaine. La méthode d'étude que nous avons utilisée est exposée en 6.2. Les résultats sont rassemblés et discutés en 6.3.

### 6.1. Introduction

L'un des postulats de la théorie de la turbulence est le fait que, à petite échelle, les propriétés statistiques devraient être universelles, au moins dans la limite d'un nombre de Reynolds infini. Cette hypothèse est faite explicitement dans la théorie K41 [5], elle est implicite dans de nombreux modèles phénoménologiques. Selon la théorie de Kolmogorov, il existe ainsi une cascade des grandes échelles vers les petites, pendant laquelle l'information des grandes échelles est perdue. Cette universalité implique que les fluctuations de vitesse à petite échelle devraient posséder la plus grande symétrie possible, et en particulier être isotropes quelle que soit la forme de l'écoulement à grande échelle (jet, couche limite, turbulence de grille, ...) : en particulier, tous les moments d'ordres impairs des différences de vitesse devraient s'annuler à petite échelle. C'est le postulat d'isotropie locale (PIL). Celui-ci ne devrait en principe s'appliquer que si le nombre de Reynolds  $Re$  est suffisamment grand. En effet, il faut un spectre d'échelles assez large pour que l'isotropisation puisse s'effectuer. En pratique, le PIL prédit une décroissance d'anisotropie à petite échelle à nombre de Reynolds croissant ou, de manière équivalente, une diminution d'anisotropie à échelle décroissante.

Le PIL a toujours été supposé universellement, mais ce n'est que depuis une dizaine d'années que des études expérimentales et numériques sont effectuées pour le vérifier : auparavant il était en effet impossible, numériquement comme expérimentalement, d'étudier la question à des nombres de Reynolds suffisamment grands.

L'écoulement turbulent anisotrope à grande échelle le plus simple est un écoulement cisailé. C'est donc celui qui a été le plus étudié, que ce soit dans le cas statistiquement homogène ou dans une couche limite. Ainsi, S.G. Saddoughi et S.V. Veeravalli ont mesuré en 1994 dans une couche limite turbulente les moments du second ordre de diverses composantes de la vitesse [32]. Ces derniers sont consistants avec les requis cinématiques du PIL dans la gamme inertielle. Mais le PIL suppose que tous les moments obéissent à ses considérations de symétrie. En 1995, A. Pumir et B.I. Shraiman étudient numériquement un écoulement turbulent homogène cisailé, et montrent que, selon la fonction de corrélation à deux points de la vorticité, les propriétés à petite échelle de l'écoulement deviennent isotropes pour des valeurs croissantes de  $Re$ , mais que ce n'est pas le cas si l'on considère des fonctions de cor r lation d'ordre trois [33, 34]. Plus tard, X. Shen et Z. Warhaft mesurent dans un écoulement turbulent homogène cisailé les moments de différences finies et de dérivées de la vitesse [35]. Les moments impairs des dérivées sont non nuls, et ne semblent pas diminuer pour des valeurs croissantes de  $Re$ , tandis que les mêmes moments des différences finies décroissent moins vite que prévu lorsque l'échelle diminue. Les auteurs concluent que le PIL fournit des prévisions incorrectes pour les moments étudiés.

Puis, J. Schumacher, K.R. Sreenivasan et P.K. Yeung réinterprètent les résultats précédents, en insistant sur le fait que l'intermittence à petite échelle et l'ordre de grandeur du paramètre de cisaillement travaillent avec le nombre de Reynolds pour déterminer l'amplitude des moments impairs des dérivées de fluctuations de vitesse [36]. Au même moment, L. Biferale et M. Vergassola étudient par DNS un écoulement turbulent en canal, en appliquant aux fonctions de structure la méthode de décomposition en terme des représentations irréductibles du groupe de rotation  $SO(3)$ , possible grâce à l'invariance par rotation de l'équation de Navier-Stokes non forcée, et proposée en [37]. Ils constatent alors que les fluctuations deviennent de plus en plus sous-dominantes à petite échelle lorsque leur degré d'anisotropie est croissant [38, 39]. Cela dit, dans certaines conditions, telles que celles d'un écoulement cisailé, la contribution isotrope (moment angulaire  $l=0$ ) s'annule par symétrie. Bien que formellement sous-dominant, le moment angulaire  $l=1$  conduit bien   une contribution anisotrope forte.

On peut retenir de toutes ces études que :

- les comportements des moments d'ordre 2 de la vitesse sont consistants avec les requis cinématiques du PIL,
- les moments d'ordres supérieurs décroissent plus lentement que prévu à  $Re$  croissant ou à échelle décroissante,
- malgré tout, il existe une hiérarchie : plus un type de fluctuation est anisotrope, plus il devient sous-dominant à petite échelle.

Le modèle du tétraèdre permet de calculer les statistiques du tenseur de gradient de vitesse moyenné dans la gamme inertielle,  $M$ . On montre dans la section 6.3 les

solutions de ce modèle à différentes échelles de cette gamme, dans le cas où l'écoulement turbulent subit un cisaillement. On s'attachera en particulier à comparer le comportement, lorsque l'échelle diminue, des moments de  $M$  d'ordres 2 et 3 dans les cas anisotrope et isotrope. Avant cela on présente dans la section suivante la méthode que nous avons utilisée.

## 6.2. Méthode d'étude

### Prise en compte de la condition à grande échelle

Comme on l'a vu au chapitre 3, le modèle du tétraèdre dépend d'une condition à grande échelle : la forme du champ de vitesse à l'échelle intégrale  $L$ . On a toute liberté pour changer cette condition. Ainsi, dans le cas d'un forçage avec cisaillement, on pourra fixer la condition suivante au lieu de la condition (3.16) :

$$P(M, Tr(g) = L^2) \sim \exp \left[ -\frac{Tr[(M - \Sigma)(M - \Sigma)^t]}{\varepsilon^{2/3} L^{-4/3}} \right] \quad (6.1)$$

où  $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice de cisaillement.

La distribution de probabilité jointe de  $M$  et  $g$  s'exprime alors de la façon suivante :

$$P(M, g) = \int dM' \int dT \int_{M(0)=M'}^{M(t)=M} [DM''] \int_{g(0)=g'}^{g(t)=g} [Dg''] \exp - \left[ S(M''; g'') + \frac{Tr[(M' - \Sigma)(M' - \Sigma)^t]}{\varepsilon^{2/3} L^{-4/3}} \right] \quad (6.2)$$

L'action  $S$  est toujours définie à partir du Lagrangien présenté en D.3. On peut évaluer numériquement l'expression de la distribution  $P(M, g)$  définie en (6.2), comme celle de la distribution définie en (3.20), par une approche semi-classique ou par une méthode de type Monte-Carlo. Pour une plus grande efficacité nous avons choisi de calculer dans un premier temps les solutions semi-classiques du problème. La méthode utilisée est la même que celle décrite en 4.1, à ceci près qu'il est maintenant nécessaire de tenir compte des degrés de liberté de rotation de  $M$ .

En effet, pour paramétrer la matrice  $M$  à petite échelle on avait utilisé au chapitre 4 le fait que pour toute matrice carrée réelle  $A$  il existe une matrice  $\mathcal{R}$  orthogonale et une matrice  $T$  quasi-triangulaire supérieure (i.e. dont la diagonale est constituée de blocs 1x1 ou de blocs 2x2) telles que :  $A = \mathcal{R}.T.\mathcal{R}^t$ . Dans le cas où le forçage était



isotrope, l'invariance du problème par rotation permettait de ne pas tenir compte des degrés de liberté de rotation de  $M$ , et donc de paramétrer celle-ci sous la forme d'une matrice quasi-triangulaire  $T$ . Par contre, lorsque l'écoulement à grande échelle est cisailé, l'invariance du problème par rotation est brisée, et il devient nécessaire de tenir compte des rotations possibles de la matrice  $T$ .

## Prise en compte des rotations possibles de $M$

La matrice  $M$  à petite échelle dépend maintenant de trois paramètres supplémentaires. Avec la méthode de résolution semi-classique, en se fixant les valeurs de  $Q$ ,  $R$  et  $r$ , l'échelle de longueur, il reste donc 14 paramètres libres pour définir les conditions initiales (à petite échelle) : les 3 composantes de la vorticité, 3 degrés de liberté de rotation, et les 8 composantes indépendantes de  $\frac{dM}{dt}$ . Il est en principe possible d'appliquer la même méthode que celle exposée au chapitre 4 : l'optimisation serait alors effectuée sur une fonction de 14 paramètres au lieu de 11. Par souci d'efficacité numérique, nous avons préféré utiliser une méthode légèrement différente pour calculer la distribution  $P(Q, R)$ .

Comparons en effet les contributions à la distribution de probabilité  $P(Q, R)$  d'une condition initiale  $M_r$  et d'une autre  $\widetilde{M}_r = \mathcal{R}.M_r.\mathcal{R}^t$  (en choisissant dans les deux cas la même valeur de  $\frac{dM}{dt}$  à l'instant initial). La dynamique (S.4) conduit à la même valeur de l'action  $S$ , mais à des valeurs différentes des matrices  $\widetilde{M}$  à l'échelle intégrale. L'invariance par rotation de (S.4) implique en effet que  $\widetilde{M}_L$ , l'image à l'échelle intégrale de  $\widetilde{M}_r$  par la dynamique, est égale à  $\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t$ , où  $M_L$  est l'image de  $M_r$  à l'échelle intégrale par cette même dynamique. Les deux contributions à  $P(Q, R)$  diffèrent donc à cause de la différence entre les termes  $Tr[(M_L - \Sigma)(M_L - \Sigma)^t]$  et  $Tr[(\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t - \Sigma)(\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t - \Sigma)^t]$ . On peut donc n'appliquer les rotations que sur l'image de  $M$  à l'échelle intégrale. La méthode que nous avons utilisée pour calculer  $P(Q, R)$  est finalement la suivante<sup>1</sup> :

- On se fixe  $Q$ ,  $R$  et  $r$  et 11 paramètres libres. La paramétrisation de  $M$  à petite échelle est la même que dans le cas isotrope.
- On intègre le système suivant jusqu'à ce que l'échelle intégrale soit atteinte, c'est-à-dire jusqu'à ce que  $Tr(g) = L^2$  (le Lagrangien  $\mathcal{L}$  est toujours celui défini en D.3) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \partial \mathcal{L} / \partial \dot{M}_{ab} \\ M_{ab} \\ g_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{L} / \partial M_{ab} \\ \dot{M}_{ab} \\ \dot{g}_{ab} \end{pmatrix}$$

On a alors l'action  $S_c(M''; g'')$  et la valeur de  $M$  à l'échelle intégrale :  $M_L$ .

<sup>1</sup>Comme dans le cas isotrope, on a négligé le Jacobien  $\frac{D(Q, R)}{D(\lambda, \Delta)}$ .

- On calcule le minimum, à  $M_L$  et  $\Sigma$  fixés, de la fonction de 3 variables qui à  $\mathcal{R}$  associe  $Tr[(\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t - \Sigma)(\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t - \Sigma)^t] : \mathcal{R}$ , matrice de rotation de dimension 3x3, dépend en effet de 3 paramètres (voir ci-dessous). Une fois ce minimum  $Tr_{min}$  calculé, on a  $S_c(M''; g'') + Tr_{min}$ , l'opposé de l'intégrant de la PDF (cf équation (6.2)) en fonction des 11 paramètres initiaux.
- On calcule le minimum de cette fonction  $f$  de 11 variables : c'est, au signe près, le logarithme de la PDF recherchée ( $f \equiv -\ln(PDF)$ ).

L'intérêt de cette méthode, qui consiste à découpler l'optimisation sur les degrés de liberté de rotation de celle sur les autres paramètres, et à ne l'effectuer qu'à l'échelle intégrale, est relié au fait que la fonction qui aux trois paramètres de  $\mathcal{R}$  associe  $Tr[(\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t - \Sigma)(\mathcal{R}.M_L.\mathcal{R}^t - \Sigma)^t]$  ( $M_L$  et  $\Sigma$  sont fixés) est très simple : c'est un produit de fonctions sin et cos. L'optimisation de cette fonction, réalisée à l'aide de l'algorithme amesba (voir annexe C), est donc très rapide. De cette façon, bien qu'on ait ajouté 3 paramètres libres supplémentaires par rapport au problème dans le cas isotrope, le temps de calcul n'est que très peu allongé.

## Paramétrisation de la matrice orthogonale $\mathcal{R}$

Pour paramétrer la matrice  $\mathcal{R}$ , nous avons utilisé la décomposition suivante. Toute matrice de rotation de dimension 3x3 peut en effet s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\psi . \mathcal{R}_\theta . \mathcal{R}_\phi$$

avec :

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \mathcal{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont connus sous le nom d'angles d'Euler.

## 6.3. Résultats

On présente ici les solutions du modèle avec cisaillement à grande échelle. Ces solutions ont été calculées par la méthode exposée dans la section précédente. L'intensité du cisaillement est mesurée par  $s$ , le taux de cisaillement. Pour comparer cette intensité à celle de la turbulence, on considère de façon générale le paramètre sans dimension  $S^* = \frac{s \langle u^2 \rangle}{\varepsilon}$ . Dans la plupart des expériences et des simulations,  $S^*$  est

compris entre 5 et 7, même s'il peut atteindre plus rarement des valeurs de l'ordre de 3 ou 9 [36]. Dans le cas présent, la valeur du paramètre de cisaillement peut être estimée de la façon suivante :  $S^* = \frac{s \langle u^2 \rangle}{\varepsilon} \sim \frac{s(\varepsilon L)^{2/3}}{\varepsilon} = s(L^2/\varepsilon)^{1/3}$ .

On présente pour  $S^*=0, 3$  et  $6$  les lois d'échelles de quelques quantités dynamiques, les fonctions distributions de probabilité jointes des invariants  $Q$  et  $R$ , puis les densités de grandeurs physiques dans le plan  $(R, Q)$ . Ces résultats sont discutés en 6.3.4. On prendra soin de ne pas confondre par la suite  $S^*$ , le paramètre de cisaillement, et  $S$ , le tenseur des déformations.

### 6.3.1. Lois d'échelles

Sur la figure 6.1 sont représentées les lois d'échelles de  $\langle Tr(S^2) \rangle$ , de l'enstrophie, du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ , et de  $\langle -Tr(S^3) \rangle$  pour les deux valeurs du paramètre de cisaillement  $S^*$  étudiées, ainsi que dans le cas isotrope ( $S^*=0$ ). Les valeurs des autres paramètres sont  $\alpha=0,4$ ,  $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ , valeurs pour lesquelles, dans le cas isotrope et avec la méthode semi-classique,  $\langle Tr(S^2) \rangle$  et  $\langle \omega^2 \rangle$  vérifient le scaling K41 et le transfert d'énergie a le bon signe (voir chapitre 4).

Comme on pouvait s'y attendre, à grande échelle toutes les quantités ont des valeurs moyennes différentes selon l'amplitude du cisaillement.

Pour des valeurs décroissantes de l'échelle, seule la moyenne de l'enstrophie semble dépendre de moins en moins de  $S^*$ . Pour  $r=L/16$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$  a quasiment la même valeur pour les trois valeurs du paramètre de cisaillement.

Par contre, les trois autres quantités semblent garder plus longtemps la mémoire de la condition à grande échelle : leurs moyennes pour des valeurs différentes de  $S^*$  restent très différentes à la plus petite échelle considérée.

### 6.3.2. Fonction distribution de probabilité dans le plan $(R, Q)$

La figure 6.2 représente les distributions de probabilité jointes des invariants  $Q$  et  $R$  adimensionnés, calculées pour  $S^*=0, 3$  et  $6$ , avec  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ . Pour ne pas surcharger les figures, on a d'abord représenté les PDF obtenues pour  $S^*=0$  et  $3$ , puis pour  $S^*=3$  et  $6$ . Les invariants  $Q$  et  $R$  ne sont plus normalisés par la variance des déformations, comme dans les chapitres précédents. En effet, les valeurs de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  peuvent différer d'un ordre de magnitude pour deux valeurs de  $S^*$  (voir Fig. 6.1(a)). Dans ce chapitre, on normalise plutôt les invariants de la façon suivante :  $Q_r = Q \cdot (r^2/\varepsilon)^{2/3}$  et  $R_r = R \cdot (r^2/\varepsilon)$ . Pour chaque valeur de  $(r, S^*)$  sont tracées les lignes d'isoprobabilité de valeurs  $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-6}$ .

Pour des valeurs décroissantes de l'échelle  $r$ , les lignes de même valeur calculées pour les trois valeurs du paramètre de cisaillement ont tendance à se superposer

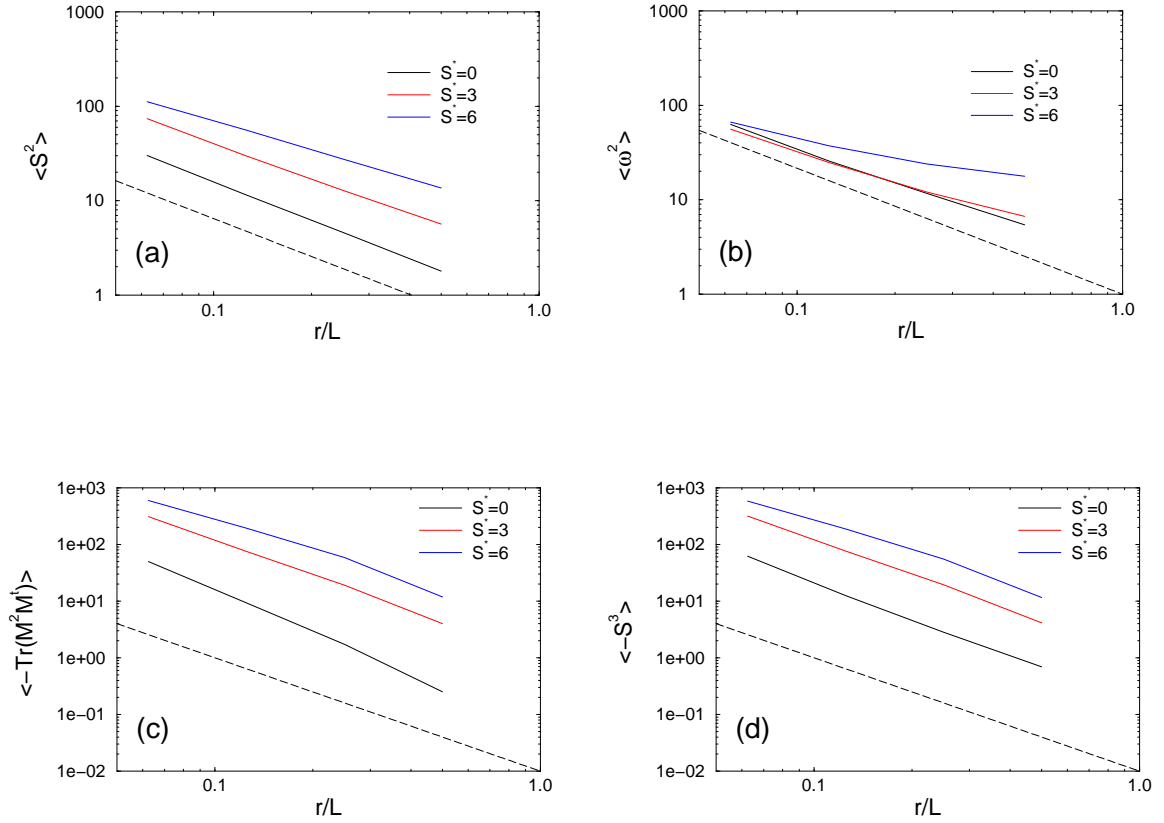


FIG. 6.1.: Lois d'échelles de (a)  $\langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ , (b)  $\langle \omega^2 \rangle$ , (c)  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  et (d)  $\langle -\text{Tr}(S^3) \rangle$  pour  $\alpha=0,4$ ,  $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$  et trois valeurs de  $S^*$ . Les droites de pentes  $-4/3$  et  $-2$ , qui correspondent au scaling de Kolmogorov, servent de guides pour l'œil.

progressivement, excepté dans la partie du plan  $Q < 0, R > 0$ . En effet, le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice la distribution est de plus en plus étirée pour des valeurs croissantes de  $S^*$ . Ce phénomène ne semble pas s'atténuer de façon significative quand l'échelle diminue.

### 6.3.3. Densités de quantités dynamiques dans le plan $(R, Q)$

Les densités de  $Tr(S^2)$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega.S.\omega$ ,  $-r^2Tr(M^2M^t)$  et  $-Tr(S^3)$  dans le plan  $(R_r, Q_r)$  sont représentées sur les figures 6.3 à 6.7. Toutes ces densités ont été calculées pour  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$  et  $\gamma=0,25$ , pour quatre échelles de longueur. Comme sur la figure 6.2, on a dans chaque cas représenté les lignes d'isodensités pour  $S^*=0$  et 3, puis pour  $S^*=3$  et 6.

Pour des valeurs croissantes de  $S^*$ ,  $Tr(S^2)$  est de moins en moins concentrée au voisinage de l'origine : la densité de cette grandeur est de plus en plus importante le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice (Fig. 6.3). Ce phénomène ne semble pas s'atténuer de façon significative aux petites échelles.

Pour les grandes valeurs de  $S^*$ , l'enstrophie est également moins concentrée autour de l'origine à grande échelle (Fig. 6.4). Cependant, lorsque  $r$  diminue  $\omega^2$  tend à être distribuée de la même manière dans le plan  $(R, Q)$  quelle que soit la valeur de  $S^*$ .

À grande échelle, pour des valeurs croissantes de  $S^*$  la densité de production d'enstrophie est de plus en plus étalée, surtout dans la partie du plan  $R > 0$  (Fig. 6.5). En revanche, lorsque l'échelle diminue  $\omega.S.\omega$  est distribuée de façon de plus en plus semblable pour les différentes valeurs du taux de cisaillement. Comme dans le cas isotrope, la partie négative de  $\omega.S.\omega$  domine la partie positive : la moyenne de cette quantité calculée par la méthode semi-classique est toujours négative.

Comme dans le cas isotrope, les densités de transfert d'énergie et de  $-Tr(S^3)$  sont très semblables pour chaque valeur de  $(r, S^*)$  (Fig. 6.6 et 6.7). Pour des valeurs croissantes du paramètre de cisaillement, ces quantités sont de moins en moins concentrées au voisinage de l'origine. Ce phénomène ne semble pas s'atténuer de façon significative aux petites échelles.

### 6.3.4. Discussion

Le calcul des lois d'échelles des quantités dynamiques a montré que, pour toutes les valeurs de  $S^*$  considérées, l'enstrophie moyenne tendait rapidement vers sa valeur dans le cas isotrope pour des valeurs décroissantes de l'échelle. Par contre, les moyennes des autres grandeurs étudiées ( $Tr(S^2)$ , le transfert d'énergie et  $-Tr(S^3)$ ) ne semblent pas converger vers leurs valeurs dans le cas isotrope lorsque l'échelle diminue.

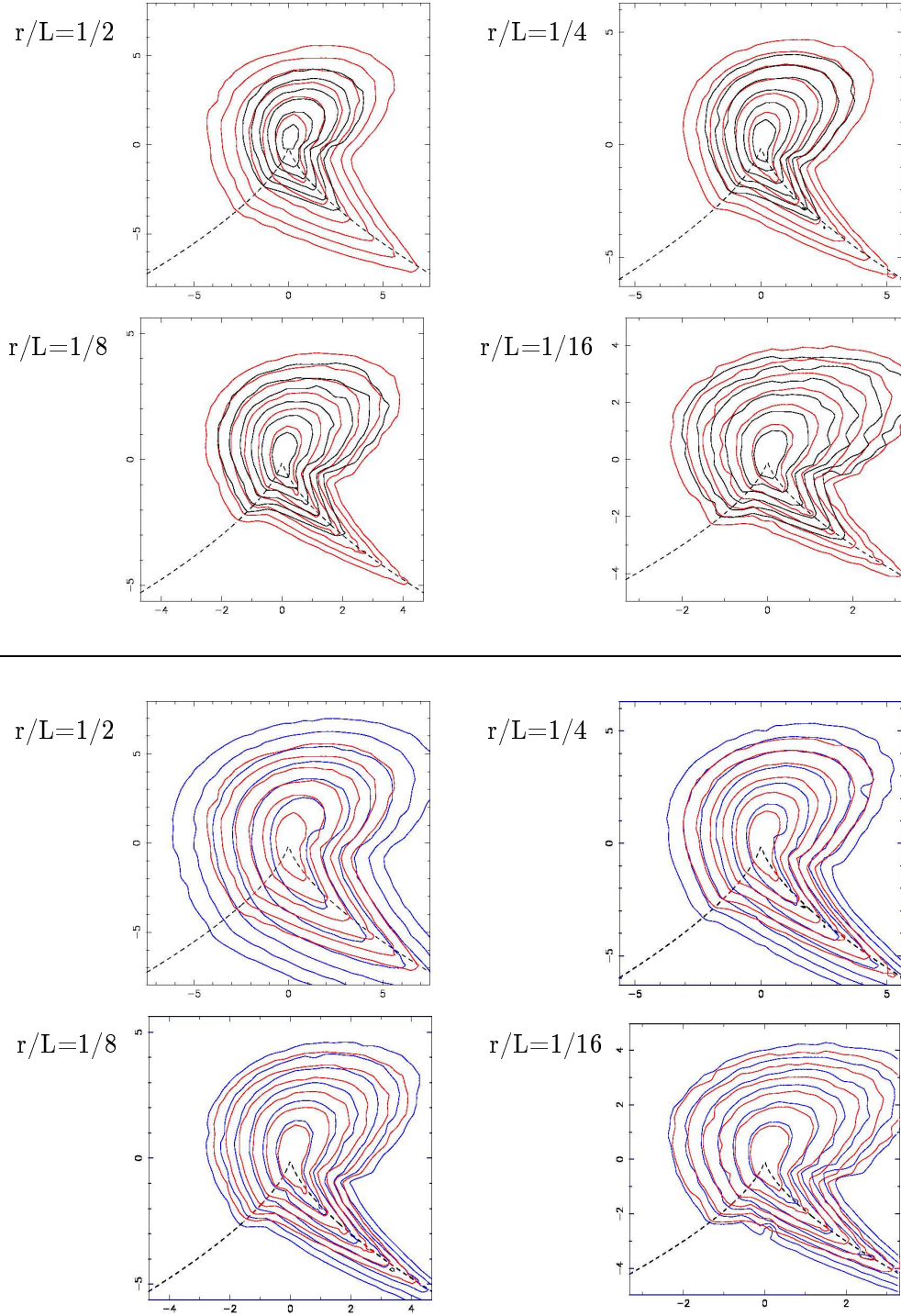


FIG. 6.2.: Distributions de probabilité jointes des invariants  $Q_r$  (en ordonnée) et  $R_r$  (en abscisse) :  $Q_r = Q.(r^2/\varepsilon)^{2/3}$  et  $R_r = R.(r^2/\varepsilon)$ . Les distributions sont calculées pour quatre échelles, avec  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ . En haut :  $S^*=0$  (noir) et 3 (rouge). En bas :  $S^*=3$  (rouge) et 6 (bleu). Les lignes d'isoprobabilité ont pour valeurs  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ , ...,  $10^{-6}$ .

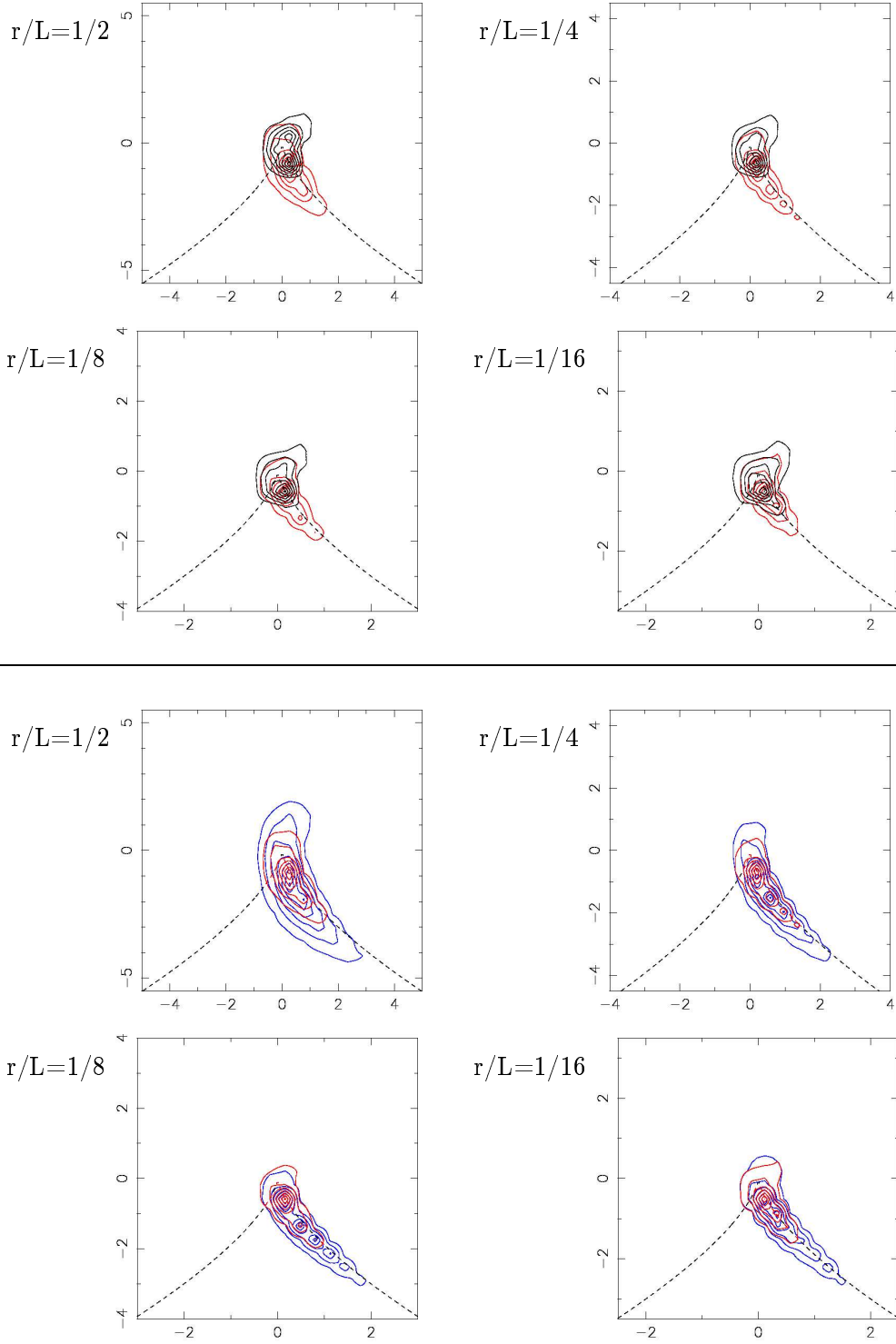


FIG. 6.3.: Densités de  $\text{Tr}(S^2)$  dans le plan  $(R_r, Q_r)$ . Les distributions sont calculées pour quatre échelles différentes, avec  $\alpha=0,6$ ,  $\beta=0,4$ ,  $\gamma=0,25$ . En haut :  $S^*=0$  (noir) et 3 (rouge). En bas :  $S^*=3$  (rouge) et 6 (bleu).

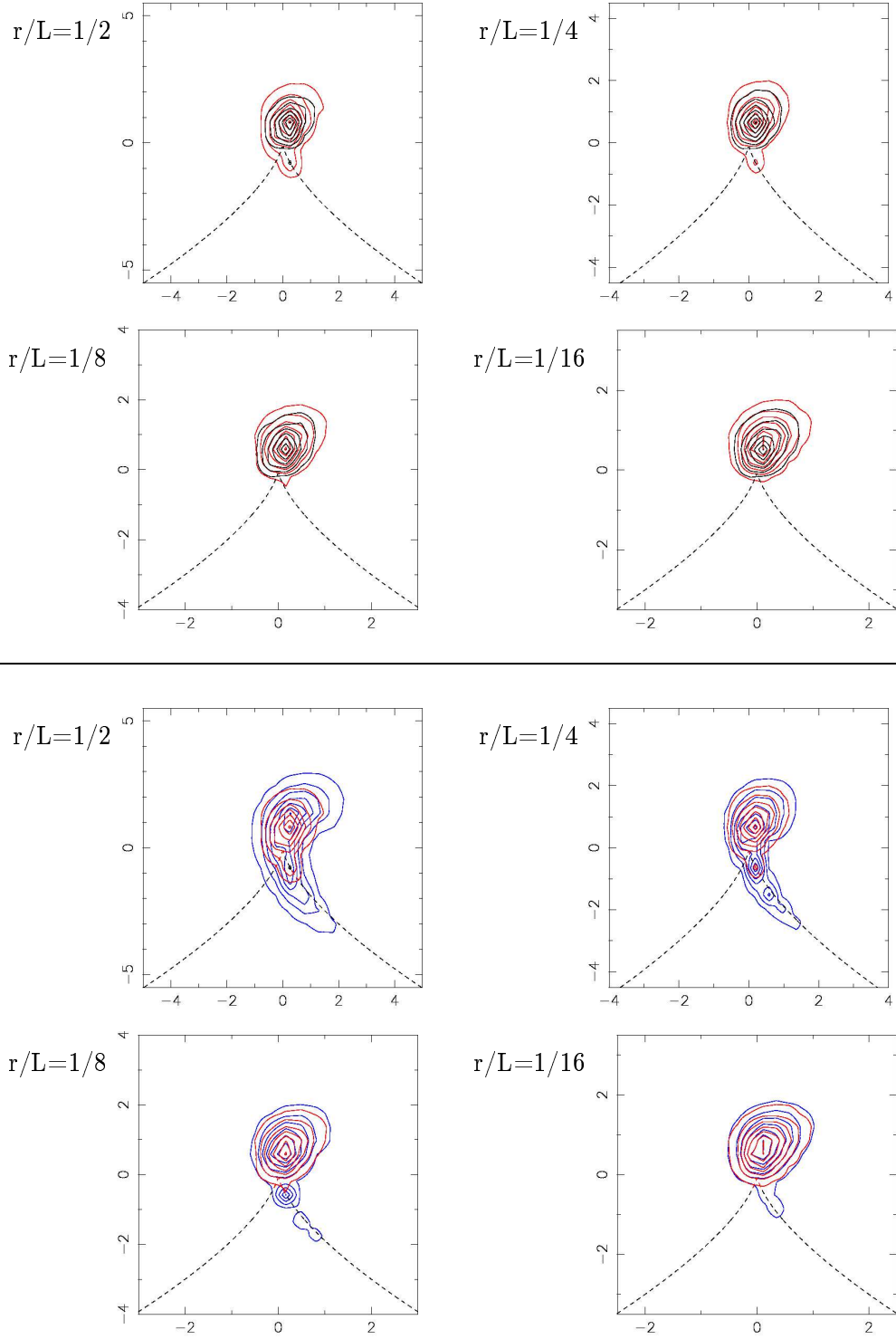


FIG. 6.4.: Densités d'enstrophie dans le plan  $(R_r, Q_r)$ . Les conventions sont les mêmes que sur la figure 6.3.



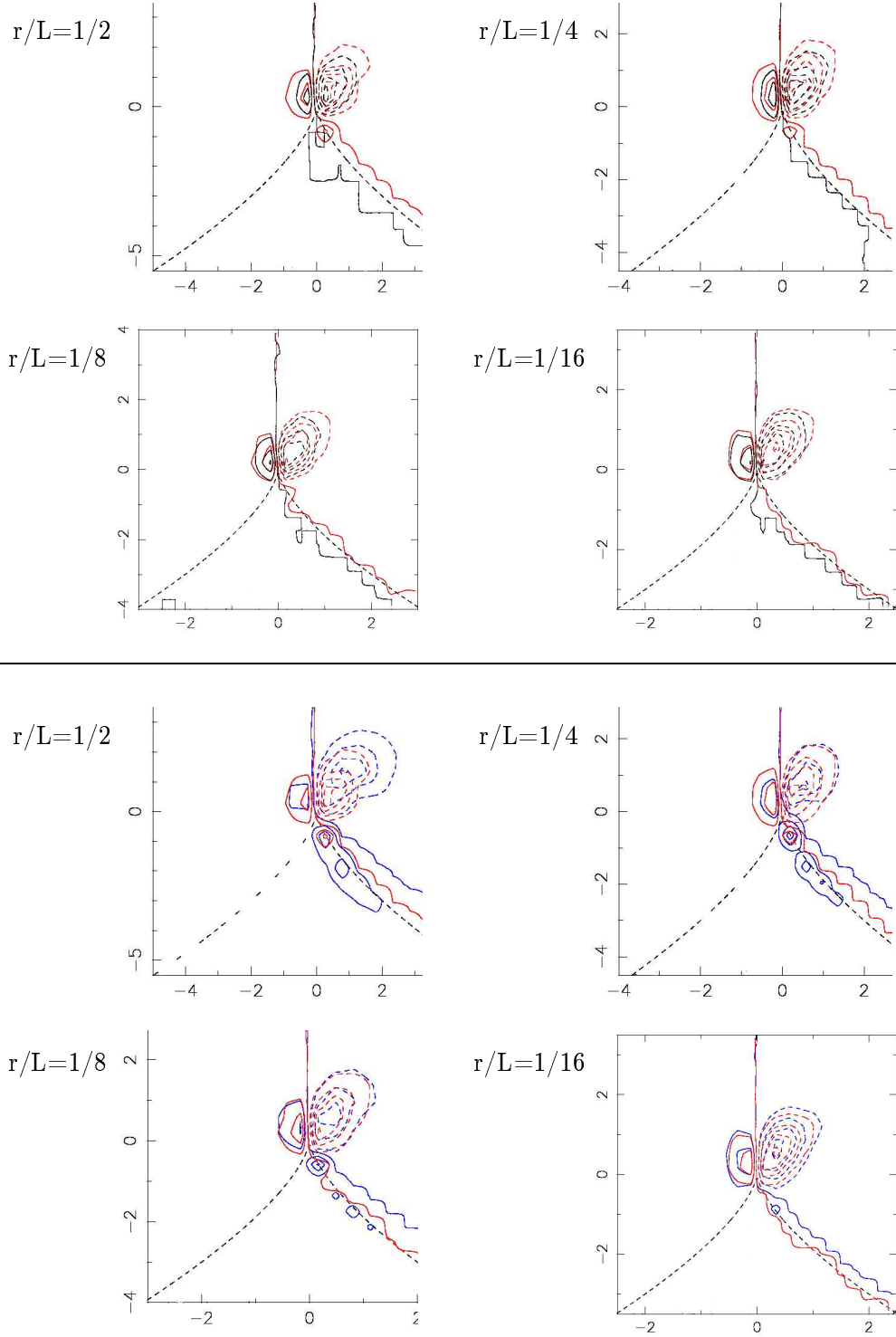


FIG. 6.5.: Densités de production d'enstrophie dans le plan  $(R_r, Q_r)$ . Les conventions sont les mêmes que sur la figure 6.3.

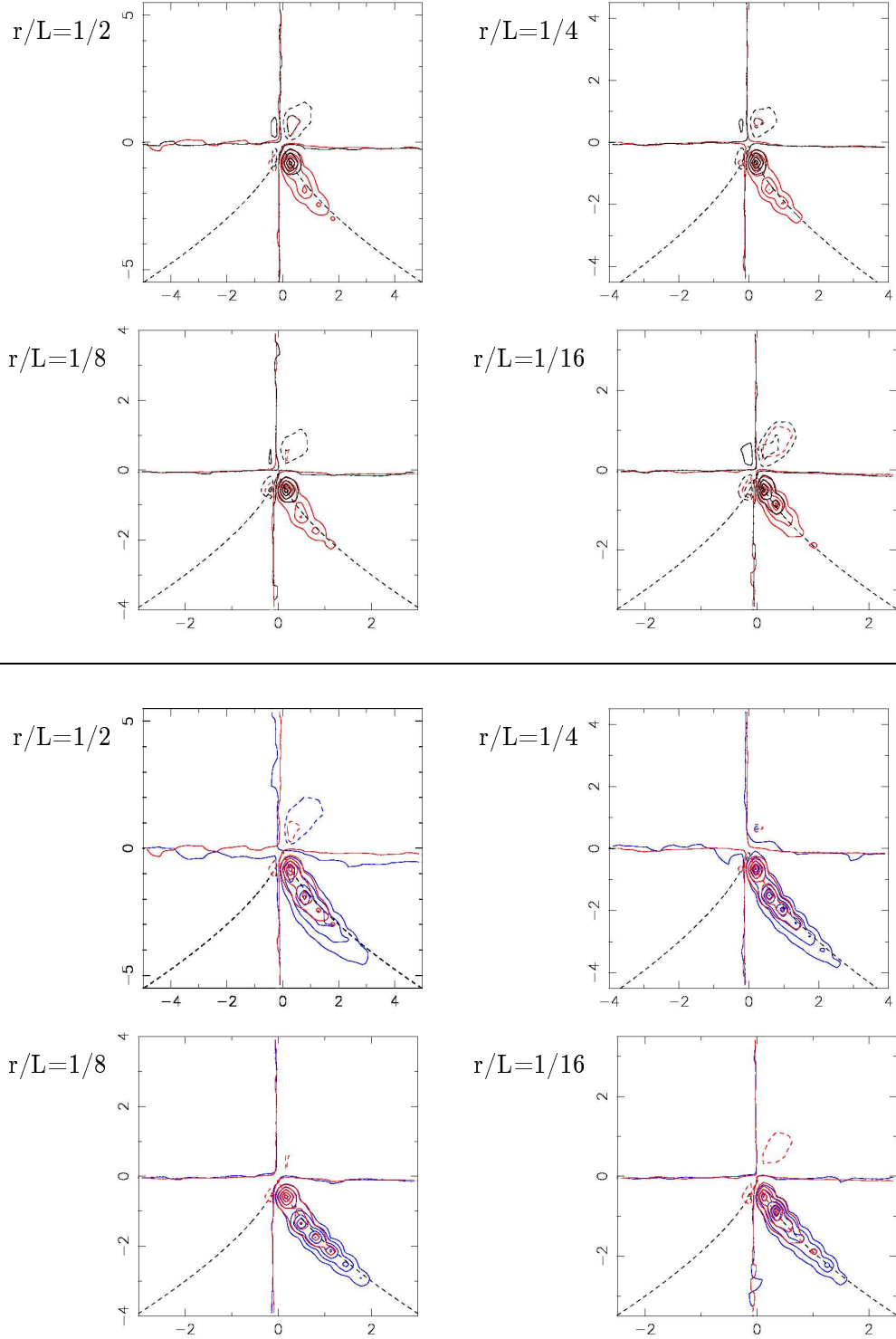


FIG. 6.6.: Densités de transfert d'énergie dans le plan  $(R_r, Q_r)$ . Les conventions sont les mêmes que sur la figure 6.3.

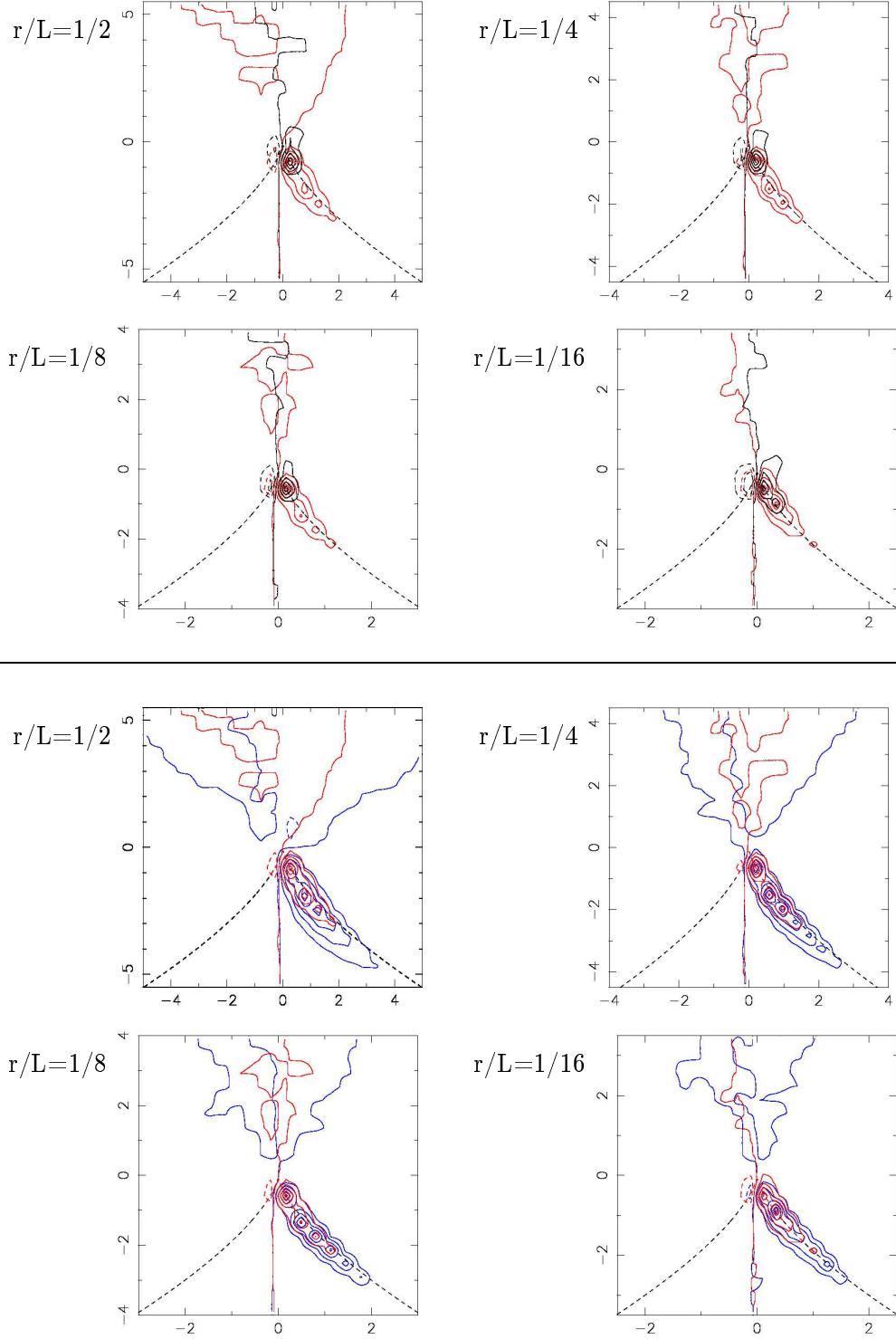


FIG. 6.7.: Densités de  $-Tr(S^3)$  dans le plan  $(R_r, Q_r)$ . Les conventions sont les mêmes que sur la figure 6.3.

## Consistance des résultats

Ces observations peuvent s'interpréter en comparant l'évolution à échelle décroissante des distributions de probabilité jointes de  $Q$  et  $R$  pour plusieurs valeurs de  $S^*$ . Ainsi, on a vu que toutes ces distributions convergaient vers celle calculée dans le cas isotrope lorsque  $r$  diminue, sauf dans la partie du plan  $Q < 0$ ,  $R > 0$  : les distributions sont en effet beaucoup plus étirées le long du côté  $R > 0$  de la séparatrice pour les grandes valeurs du paramètre de cisaillement, même à petite échelle. Ceci explique pourquoi les quantités majoritairement concentrées dans cette région du plan  $(R, Q)$  [ $Tr(S^2)$ ,  $-r^2 Tr(M^2 M^t)$  et  $-Tr(S^3)$ ] semblent garder en mémoire aux petites échelles la présence de cisaillement à l'échelle intégrale, alors que les grandeurs essentiellement concentrées dans le demi-plan  $Q > 0$  [ $\omega^2$  et  $\omega \cdot S \cdot \omega$ <sup>2</sup>] dépendent de moins en moins de la valeur de  $S^*$  pour des valeurs décroissantes de  $r$ .

## Comparaison avec des résultats précédents

Comme on l'a vu en 6.1, les moments d'ordre 2 des différences de vitesse mesurés expérimentalement ont toujours été consistants avec les requis cinématiques du PIL dans la gamme inertielle [32, 35]. On pouvait donc s'attendre à ce que les moyennes de  $Tr(S^2)$  et  $\omega^2$  calculées par résolution du modèle du tétraèdre deviennent rapidement indépendantes de la valeur du paramètre de cisaillement  $S^*$ . Le comportement de l'enstrophie est conforme à cela. Par contre, celui de la variance des déformations est plus surprenant : les valeurs de  $\langle Tr(S^2) \rangle$  pour  $S^*=0$  et  $S^*=6$  diffèrent à peine moins à la plus petite échelle considérée qu'à la plus grande. La perte d'anisotropie à petite échelle selon cette quantité est donc beaucoup plus lente que ce qu'elle devrait être. Pour interpréter ce comportement, on peut émettre plusieurs hypothèses :

- Il est possible que ce soit une faiblesse du modèle. Un autre comportement qui a attiré notre attention est le fait que, dans le cas isotrope, le rapport  $\langle \omega^2 \rangle / \langle Tr(S^2) \rangle$  ne cesse de croître pour des valeurs décroissantes de l'échelle : pour  $r=L/16$ , ce rapport est de l'ordre de 2.
- Il est également possible que les résultats que nous avons obtenus décrivent ce qui se passe pendant un transitoire. Il nous faut donc examiner les précédents résultats obtenus dans l'étude des transitoires en turbulence sous cisaillement [40].

Des résultats non présentés dans ce mémoire montrent que, aux échelles considérées et pour les valeurs de  $S^* \gtrsim 3$ , le système est dans un régime transitoire.

---

<sup>2</sup>Il convient de rester prudent sur les résultats concernant la production d'enstrophie, car on sait que l'approximation semi-classique n'est pas appropriée pour décrire celle-ci d'un point de vue quantitatif. Cependant il semble raisonnable, au vu des résultats présentés dans ce chapitre, et en particulier de l'évolution des distributions  $P(R, Q)$  lorsque  $r$  diminue, de supposer que, d'après le modèle, cette grandeur dépend de moins en moins de  $S^*$  pour des valeurs décroissantes de  $r$ .

Le comportement des moments d'ordre 3, le transfert d'énergie et  $-Tr(S^3)$ , est conforme à ce que l'on pouvait attendre : les valeurs de leurs moyennes pour  $S^*=0$  et  $S^*=6$  diffèrent à peine moins à la plus petite échelle considérée qu'à la plus grande. Comme on l'a vu en 6.1, les moments d'ordre 3 sont connus pour décroître lentement quand l'échelle diminue [35].

## 7. Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie le modèle du tétraèdre, qui décrit la dynamique du tenseur de gradient de vitesse moyenné sur un volume d'échelle caractéristique  $r$  appartenant à la gamme inertielle. Ce modèle phénoménologique se présente sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires stochastiques dont les variables sont  $M$ , le tenseur de gradient de vitesse ainsi moyenné, et  $g$ , tenseur moment d'inertie qui permet de tenir compte de la déformation géométrique et du changement de taille du volume. Ce système dépend de trois paramètres sans dimension :  $\alpha$ , qui mesure la réduction de non-linéarité par la pression,  $\beta$ , qui mesure l'effet d'isotropisation des fluctuations de vitesse à petite échelle et  $\gamma$ , l'amplitude du bruit agissant sur  $M$ . Le trop grand nombre de degrés de liberté de ce système le rend impossible à résoudre par une méthode de Monte-Carlo directe, mais nous avons calculé les solutions du problème par deux méthodes.

Dans un premier temps, nous avons calculé les solutions semi-classiques du système. Cette méthode, qui consiste à ne considérer que la réalisation des bruits la plus probable, est en principe valide dans la limite où ceux-ci sont faibles. Elle a servi de première approche pour tenir compte de la partie stochastique du système. Les solutions approchées ainsi calculées présentent un accord acceptable avec des observations expérimentales [8] et des résultats de DNS. L'un des résultats essentiels de cette étude est le fait qu'il faut cependant pour cela régler la valeur du paramètre  $\alpha$  assez précisément. L'influence des deux autres paramètres sur la dynamique est beaucoup plus faible.

L'approche semi-classique nous a également permis de comprendre d'où venaient les contributions aux statistiques les plus importantes. Nous avons alors pu dans un second temps élaborer une méthode de résolution du système de type Monte-Carlo, dans laquelle les bruits sont traités plus rigoureusement. Les solutions du modèle ainsi calculées présentent un très bon accord qualitatif avec les observations expérimentales [8] et les résultats de DNS. Sur le plan quantitatif, elles dépendent fortement de la valeur de  $\alpha$ , comme les solutions semi-classiques, mais les premiers résultats semblent montrer que les valeurs de ce paramètre pour lesquelles elles ont le bon comportement ne sont pas les mêmes dans les deux cas. D'autre part, les solutions calculées par la méthode de type Monte-Carlo semblent dépendre plus fortement des deux autres paramètres du modèle. Des études sont en cours pour confirmer ces résultats.

Enfin, l'un des avantages remarquables du modèle du tétraèdre est le fait qu'il est possible de l'adapter assez simplement à différents types d'écoulements turbulents.

---

Toutes les études que nous venons de mentionner ont été réalisées pour décrire les propriétés d'un écoulement isotrope, mais nous avons dans un dernier temps calculé les solutions du modèle dans le cas anisotrope le plus simple : lorsqu'un cisaillement est superposé au forçage. Pour gagner en efficacité, ces solutions ont été calculées en utilisant l'approche semi-classique. L'étude dans le cas isotrope avait en effet permis de connaître les valeurs des paramètres pour lesquelles cette approche est pertinente, et de cerner ses limites. Les comportements de l'enstrophie, de  $-Tr(S^3)$  et du transfert d'énergie dans le cas d'un écoulement cisailé sont concordants avec des mesures expérimentales [32, 35] : la moyenne de la première ne dépend en effet rapidement plus du cisaillement lorsque l'échelle diminue, tandis que la dépendance des deux autres quantités vis à vis de  $S^*$  persiste beaucoup plus. Seul le comportement de  $Tr(S^2)$  pose problème, ce qui semble dû à la présence d'un transitoire à grande échelle. Par la suite on pourra également mesurer les lois d'échelles des fonctions de structure (dédiées des composantes de  $M$ ) et comparer les exposants de ces lois avec ceux obtenus expérimentalement [35].

Le modèle du tétraèdre apparaît très prometteur dans le cadre de l'étude de la turbulence. On a ainsi montré que ses solutions dans le cas isotrope étaient en bon accord avec des DNS et des résultats expérimentaux. La possibilité d'appliquer ce modèle à de nombreuses formes d'écoulements à grande échelle permet également d'étudier toutes sortes d'écoulements turbulents. Nous envisageons en particulier d'étudier de cette manière la turbulence sous déformations [41], sous rotation [42], et celle de Rayleigh-Taylor [43, 44].

## Deuxième partie .

Intermittence spatio-temporelle  
dans un système bidimensionnel  
de taille finie





## 8. Introduction

Durant les trois dernières décennies, de nombreuses études, tant expérimentales que théoriques, ont été consacrées au chaos, afin d'en comprendre l'origine et la nature. De nombreuses définitions du chaos, pas toutes équivalentes mathématiquement, ont été proposées, mais on peut raisonnablement qualifier de chaotique un signal dont l'auto-corrélation (temporelle et/ou spatiale) est finie [45] : ce critère permet de distinguer les situations ordonnées et désordonnées (avec ou sans symétries temporelles et/ou spatiales).

### Chaos temporel ou spatio-temporel ?

On distingue de façon générale le chaos temporel du chaos spatio-temporel. Dans le premier cas le désordre est purement temporel, dans le second il est à la fois temporel et spatial. Le chaos temporel se rencontre dans de nombreux systèmes mécaniques ou électroniques [46]. De nombreuses études ont porté sur la transition vers ce type de chaos. Trois scénarios ont ainsi été identifiés :

- En 1971, D. Ruelle et F. Takens ont montré qu'un système oscillant avec trois fréquences temporelles incommensurables pouvait devenir chaotique lorsqu'on augmentait la valeur de la contrainte [4]. Ce résultat est historiquement très important car il montre pour la première fois qu'un petit nombre de bifurcations (trois) est suffisant pour produire du chaos, contrairement à ce qu'avait postulé L.D. Landau [3], qui pensait qu'un nombre infini de ces bifurcations était nécessaire pour aboutir au spectre de Fourier continu caractéristique d'un signal chaotique.
- En 1978, M.J. Feigenbaum [47] et C. Tresser et P. Coullet [48] ont identifié le scénario de la cascade sous-harmonique, par lequel un système devient chaotique par la succession de seulement quelques doublements de période temporelle.
- En 1980, Y. Pomeau et P. Manneville ont décrit le scénario de transition par intermittence [49]. C'est le cas où un système oscillant subit des sursauts brusques et imprévisibles, l'amplitude et la fréquence de ces derniers augmentant avec l'intensité des contraintes jusqu'au chaos.

Le chaos temporel apparaît dans les systèmes à petit nombre de degrés de liberté. Dans le cas de systèmes fluides, ce nombre n'est petit que si on le contraint artificiellement, par exemple en confinant la géométrie ou en agitant le bain réactionnel. Dans le cas général, le désordre apparaissant dans un système fluide est non seulement temporel mais aussi spatial. L'étude du chaos spatio-temporel est beaucoup

---

plus compliquée que celle du chaos temporel [45] : d'un point de vue théorique, on est confronté à des équations aux dérivées partielles, impossibles à résoudre analytiquement, tandis que sur le plan expérimental les résultats présentent une dépendance très importante vis à vis de la géométrie particulière du système. Contrairement à l'étude du chaos temporel, où l'expérience servait essentiellement à conforter les résultats mathématiques, l'étude du chaos apparaissant dans les systèmes spatialement étendus consiste souvent à prendre comme point de départ des observations expérimentales effectuées dans des conditions particulières et à en développer ensuite une théorie dont le degré de généralité augmente peu à peu.

Comme l'étude du chaos temporel, celle du chaos spatio-temporel peut se faire par l'intermédiaire des différents scénarios selon lesquels un système peut y arriver. À la différence de la turbulence pleinement développée, où des structures de tailles très variables entrent en jeu [5], la turbulence faible (ou chaos spatio-temporel) est souvent caractérisée par l'existence d'une longueur caractéristique. L'état laminaire du système se présente alors sous la forme de motifs réguliers de cette taille. Le désordre spatio-temporel peut arriver par la désorganisation de la position de ces structures (turbulence de phase), par apparition de défauts topologiques (turbulence d'amplitude), ou le plus souvent par la coexistence de domaines laminaires et d'autres désordonnés dans le même système. Dans le dernier cas, la distribution spatiale et l'évolution temporelle des deux types de domaines sont désordonnées, et la fraction du système occupée par l'état chaotique augmente avec l'intensité de la contrainte. On dit alors que la transition au chaos se fait par *intermittence spatio-temporelle* (IST) [6].

## Intermittence spatio-temporelle et percolation dirigée de liens

L'intermittence spatio-temporelle est caractérisée par la coexistence dans un système spatialement étendu de deux états locaux : l'un laminaire et l'autre chaotique. Le premier doit être linéairement stable (ou absorbant), c'est-à-dire que l'état chaotique ne doit pas pouvoir apparaître spontanément au milieu d'une zone laminaire. Celui-ci ne peut se propager que selon un processus de contamination [50, 51].

Y. Pomeau [52] a remarqué que cette propriété était la caractéristique essentielle de la percolation dirigée de liens, un processus de contamination bien connu en mécanique statistique [53]. La percolation dirigée de liens<sup>1</sup> est un automate cellulaire déterministe dans lequel tous les sites d'un réseau sont synchronisés simultanément selon une probabilité de transition locale dépendant de l'état des sites appartenant à un voisinage régulier du site considéré. Chaque site peut se trouver dans deux états, l'un actif et l'autre absorbant : un site dont tous les voisins sont dans l'état absorbant a une probabilité égale à un de transiter dans ce même état. Ainsi, à

---

<sup>1</sup>Le terme « dirigée » signifie que la dynamique du système s'effectue dans une direction privilégiée : la course du temps.

une dimension (percolation dirigée (1+1)D), si les deux voisins d'un site sont dans l'état absorbant alors ce site transite dans cet état avec une probabilité de un, si un voisin est dans l'état actif (Ac) et l'autre dans l'état absorbant (Ab) alors le site transite vers Ab avec une probabilité de  $p$  ( $p$  est un paramètre), et si les deux voisins sont Ac alors le site devient Ab avec une probabilité de  $(1 - p)^2$ . Ainsi, un site Ac peut spontanément devenir Ab, quoique son activité puisse se propager par contamination. Si tous les sites du système se trouvent à un instant donné dans l'état Ab alors le réseau reste définitivement dans cet état homogène. Il faut donc au moins un noyau de sites Ac pour que l'activité se propage. En fait, celle-ci ne peut se propager que si  $p$  est supérieur à une valeur critique  $p_c$  : le seuil de percolation. La valeur de ce seuil dépend du problème particulier considéré (nature du réseau, du voisinage, ...) mais les propriétés d'échelles au voisinage du seuil sont universelles. En particulier, la transition de la percolation est une transition du second ordre (continue), le paramètre d'ordre pouvant être la densité de sites actifs. Au-dessus du seuil ( $p > p_c$ ), le réseau est un mélange statistiquement stationnaire de sites absorbants et actifs, caractérisé par une densité moyenne  $d$  de sites actifs. Quand  $p$  tend vers  $p_c$  par valeurs supérieures,  $d(p) \propto (p - p_c)^\beta$ .

La conjecture de Pomeau [52] consiste donc à considérer l'évolution spatio-temporelle de la percolation dirigée comme une représentation simplifiée des régimes d'IST. L'état absorbant (resp. actif) représente alors l'état laminaire (resp. chaotique). Le saut conceptuel est énorme, car on compare de cette manière des situations hydrodynamiques complexes, décrites par des équations aux dérivées partielles, à un simple processus de contamination stochastique. Mais il ne serait pas surprenant que les propriétés statistiques générales de la transition au chaos via IST soient universelles, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du type de système étudié.

La conjecture de Pomeau marque l'irruption des phénomènes critiques dans l'étude de la transition au chaos spatio-temporel, et donc de la notion de classe d'universalité. Une classe regroupe tous les phénomènes dont les propriétés critiques au voisinage de la transition sont identiques, ces dernières étant caractérisées par un petit nombre d'exposants (dits exposants critiques). Dans le cas de la percolation dirigée, on mesure en général les cinq exposants suivants ( $\varepsilon$  est le paramètre de contrôle,  $\varepsilon_c$  sa valeur critique,  $L$  est la taille du système et  $t$  le temps) [54] :

- $\alpha$  caractérise la décroissance algébrique du paramètre d'ordre  $m$  au seuil de la transition en partant d'une condition initiale décorrélée dans la phase Ac :  $\lim_{L \rightarrow \infty} m(\varepsilon_c, L, t) \propto t^{-\alpha}$ ,  $t \gg t_0$
- $\beta$  caractérise la variation en loi de puissance du paramètre d'ordre lorsqu'on s'approche du seuil par valeurs supérieures :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} m(\varepsilon_c + \delta\varepsilon, L, t) \propto \delta^\beta$
- $z$  caractérise la divergence algébrique de la durée de vie moyenne  $\tau$  de la phase Ac au seuil de la transition lorsqu'on augmente la taille du système :  $\tau(\varepsilon_c, L) = \langle \tau_s(\varepsilon_c, L, s) \rangle_s \propto L^z$
- $\nu_\perp$  caractérise la divergence de la longueur de corrélation temporelle  $\zeta_\perp$  dans la

- 
- phase Ac lorsqu'on s'approche du seuil :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \zeta_{\perp}(\varepsilon_c + \delta\varepsilon, L, t) \propto \delta^{-\nu_{\perp}}$
  - $\nu_{\parallel}$  caractérise la divergence de la longueur de corrélation spatiale  $\zeta_{\parallel}$  dans la phase Ac lorsqu'on s'approche du seuil :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \zeta_{\parallel}(\varepsilon_c + \delta\varepsilon, L, t) \propto \delta^{-\nu_{\parallel}}$

Seuls trois d'entre eux sont indépendants. Une manière simple de montrer qu'un système n'est pas dans la classe d'universalité de la DP (Directed Percolation) consiste à mesurer ces exposants et à montrer qu'ils ne sont pas égaux à ceux de la DP.

La vérification de la conjecture de Pomeau présenterait un double intérêt. D'une part, on montrerait une équivalence entre des systèmes déterministes et stochastiques, et d'autre part on gagnerait des renseignements sur la nature du chaos spatio-temporel (CST), car l'appartenance d'un phénomène à une classe d'universalité permet de connaître les processus dynamiques dominants au voisinage du seuil de la transition. Ainsi, l'existence de plusieurs classes, et donc de plusieurs scénarios de transition, montrerait l'existence de différents types de CST.

## Quelques systèmes numériques et expérimentaux

Sur le plan numérique, H. Chaté et P. Manneville ont été parmi les premiers à tenter de vérifier cette conjecture. Leurs premières études ont porté sur l'équation aux dérivées partielles modèle de Kuramoto-Sivashinsky amortie [55]. Mais l'étude de la transition au chaos dans de telles équations est difficile en raison de la puissance de calcul nécessaire à cause du caractère continu de l'espace, et de la difficulté à distinguer les régions laminaires des zones turbulentes. Ils ont donc élaboré un modèle minimal d'IST, de type réseau d'itérations couplées [10, 56, 57]. Dans une telle approche, l'espace et le temps sont discrétisés, mais la variable locale prend des valeurs continues. Ce modèle est donc intermédiaire entre les équations aux dérivées partielles (pour lesquelles l'espace, le temps et la variable locale sont continus), dont les comportements sont riches mais qui sont difficiles à étudier car elles sont très coûteuses en temps de calcul, et les automates cellulaires (pour lesquels l'espace, le temps et la variable locale sont discrets), faciles à calculer mais difficilement exploitables à cause du caractère discret de la variable locale. Pour plus de détails sur ce modèle on pourra consulter le chapitre 10.

L'étude de ce modèle a montré que la transition au chaos par IST pouvait être continue ou discontinue, alors que la transition de la DP est continue. Dans le premier cas, les mesures d'exposants critiques montraient le plus souvent que les systèmes n'appartenaient pas à la classe d'universalité de la DP. Mais les mesures d'exposants sont difficiles, et la question reste ouverte.

Sur le plan expérimental, la transition au chaos par IST a été observée et étudiée dans de nombreux systèmes : convection de Rayleigh-Bénard [58, 59, 60, 61], digitation visqueuse [62, 63], lignes de vortex [64], écoulements de Taylor-Dean [65], de Couette-Taylor [66] et de Couette plan [67, 68], fronts de fluide [69]. Les exposants

critiques mesurés dans toutes ces expériences ne permettent pas de conclure quant à l'exactitude de la conjecture de Pomeau : les valeurs de ces exposants sont rassemblées dans [70]. Plus récemment, P. Rupp, R. Richter et I. Rehberg ont mesuré ces exposants dans un système de ferrofluide : quatre sur les cinq mesurés sont en accord avec la DP [70]. Mais la trop petite taille de cette expérience ne permet pas de donner une réponse définitive à la conjecture de Pomeau.

## Une expérience bidimensionnelle

Je me suis pour ma part intéressée à la transition au chaos par IST dans un système à deux dimensions d'espace : C. Pirat, P. Maïssa et C. Mathis ont en effet élaboré à l'INLN une expérience bidimensionnelle d'hydrodynamique, dans laquelle un film liquide horizontal continuellement alimenté se déstabilise sous l'action de la gravité [9].

J'ai étudié cette transition avec Christophe Pirat, Jean-Louis Meunier, Philippe Maïssa et Christian Mathis. Ce travail, présenté au chapitre 9 et dont les principaux résultats sont publiés dans [71], nous a permis de mesurer un des exposants critiques caractéristiques de la classe d'universalité de la DP, qui est en accord avec celui de la DP. Un autre comportement marquant du système est la présence de bistabilité, près du seuil de la transition, entre l'IST et un régime « quasi-laminaire », semble-t-il due à la présence des bords, et donc à la taille finie du système. Nous avons voulu comprendre plus précisément, avec J.-L. Meunier et C. Pirat, l'influence de cette taille finie, et savoir en particulier si la présence de bistabilité au voisinage du seuil était un phénomène générique ou pas. Nous avons dans ce but adapté le modèle minimal d'IST [10, 56] à la géométrie particulière du système expérimental. Les résultats de cette étude sont présentés au chapitre 10. Le chapitre 11 rassemble les conclusions de cette seconde partie.

---

## 9. Résultats expérimentaux

Ce chapitre traite de l'étude de la transition au chaos spatio-temporel dans le système réel présenté en [9]. La section 9.1 est consacrée à la présentation du dispositif expérimental ainsi qu'aux comportements observés, réunis dans le diagramme des phases du système. La méthode d'étude que nous avons utilisée est décrite en 9.2. Les résultats obtenus sont montrés en 9.3 et discutés en 9.4. Enfin, les conclusions de ce travail sont présentées dans la section 9.5.

### 9.1. Dispositif expérimental et diagramme des phases du système

#### 9.1.1. Dispositif expérimental

L'expérience, réalisée au sein de l'équipe « Approche expérimentale des phénomènes hors d'équilibre » à l'INLN, par Christophe Pirat, Christian Mathis et Philippe Maïssa, permet l'étude des motifs formés lors de la déstabilisation, à deux dimensions d'espace, d'un film liquide horizontalement alimenté.

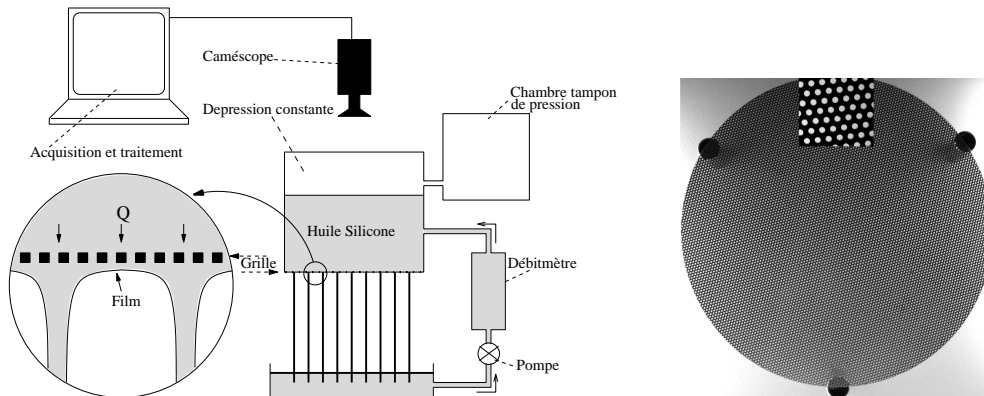


FIG. 9.1.: *Schéma du dispositif expérimental.*

Le cœur du dispositif expérimental est constitué d'une grille circulaire et plane jouant le rôle d'un milieu poreux [9, 72]. Cette grille est placée horizontalement



dans le fond d'une chambre cylindrique en dépression stable et contrôlée (Fig. 9.1). Cette chambre peut être alimentée en continu en liquide. À débit nul, la dépression compense exactement le poids du fluide : il n'y a pas d'écoulement. Un apport même faible de liquide rompt cet équilibre : le fluide s'écoule à travers la grille. La dépression assure alors une hauteur de fluide suffisamment importante au dessus de la grille pour garantir une bonne uniformité de passage à travers celle-ci. Les paramètres de contrôle de cette expérience sont le débit (le dispositif est alimenté en continu en fonctionnement) et la viscosité du liquide : les fluides utilisés sont des huiles silicone de différentes viscosités mais dont la masse volumique et la tension de surface sont très proches par ailleurs. Les huiles utilisées ont une masse volumique de  $0,95 \pm 0,03 \text{ g/cm}^3$ , une tension de surface de  $20 \pm 1 \text{ mN/m}$  et des viscosités cinématiques  $\nu$  de 5 à  $350 \text{ mm}^2/\text{s}$ .

De façon générale, pour une viscosité et un débit donnés, l'huile passe à travers la grille, un film se forme puis se déstabilise sous l'effet de la gravité. Cette expérience est donc intermédiaire entre celle de la fontaine circulaire [73], son analogue à une dimension, et celle de l'instabilité de Rayleigh-Taylor à deux dimensions, où l'on étudie la déstabilisation d'un film liquide suspendu non alimenté [74].

### 9.1.2. Diagramme des phases du système

Le diagramme des phases du système est représenté sur la figure 9.2. Selon le débit d'alimentation et la viscosité du fluide, on observe différents régimes d'écoulement : pour un débit croissant, des gouttes, des colonnes et des nappes liquides.

La dynamique du système est gouvernée par la compétition entre la gravité et la tension de surface. L'instabilité primaire est donc celle de Rayleigh-Taylor (RT) [75, 76, 77] : à très faible débit on observe sous la grille des gouttes disposées sur un réseau hexagonal centré. Ce comportement est similaire à celui observé lorsque l'on retourne une plaque plane recouverte d'un film liquide mince : après un certain temps, le film se déstabilise sous la forme de gouttes disposées sur un réseau hexagonal [74]. La longueur d'onde de ce réseau est égale à  $\lambda_{RT} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$  (13,2 mm pour les huiles utilisées).

Dans la zone du diagramme 9.2 hachurée en jaune, le film de liquide n'occupe pas toute la surface de la grille : la surface de ce film augmente proportionnellement avec le débit, de sorte que le débit surfacique (vitesse de passage de l'huile à travers la grille) reste constant. On remarque que la dynamique est la plus riche pour les huiles de grandes viscosités. C'est donc celle qu'on se propose de décrire ici, les commentaires étant généralisables aux autres parties du diagramme.

À bas débit, le régime de gouttes persiste (I). La distance entre ces objets reste très proche de  $\lambda_{RT}$ .

Pour un débit plus important, des colonnes liquides prennent place (**II**), elles aussi génériquement disposées selon un réseau hexagonal centré, avec néanmoins une longueur d'onde plus petite, proche de 11,6 mm. On transite du régime de gouttes au régime de colonnes par l'intermédiaire d'un régime mixte (**I/II**). Sans entrer dans les détails que le lecteur pourra retrouver dans [9, 72, 78], la phénoménologie est très riche dans le régime de colonnes. Il est en effet possible d'observer des défauts topologiques, des déstabilisations globales sous la forme d'oscillations de lignes de colonnes en opposition de phase, ou encore une disparition progressive de la structure hexagonale, cette dernière pouvant arriver à débit croissant (**II<sub>turbH</sub>**) ou décroissant (**II<sub>turbL</sub>**), selon la viscosité. La dynamique est alors chaotique : les colonnes se déplacent erratiquement, elles peuvent fusionner quand deux d'entre elles sont trop proches, ou apparaître dans une région où leur densité est temporairement faible. Ce chapitre traite de la transition du régime laminaire au régime chaotique de colonnes.

Enfin, pour les débits les plus importants, des nappes de liquide prennent place (**III**). Ces nappes peuvent s'organiser sous la forme de structures géométriques simples comme des spirales en rotation ou des cellules. Là encore, on transite du régime de colonnes à celui de nappes par l'intermédiaire d'un régime mixte (**II/III**).

### 9.1.3. La transition au chaos spatio-temporel dans le régime de colonnes

Je me suis intéressée au régime de colonnes, et plus particulièrement à la transition du système de l'état stationnaire spatialement organisé à un état chaotique. Comme on l'a vu, cette transition peut se faire, à viscosité constante, en augmentant le débit (si  $\nu \gtrsim 35 \text{ mm}^2/\text{s}$ ) ou en le diminuant (si  $\nu \lesssim 35 \text{ mm}^2/\text{s}$ ). Dans les deux cas elle arrive par intermittence spatio-temporelle. Par la suite on s'intéressera aux deux viscosités typiques  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . La figure 9.4 illustre les deux types de transitions. On se place toujours à viscosité constante, le paramètre d'ordre est donc le débit d'alimentation.

Dans le cas des grandes viscosités (Fig. 9.4(a)), il existe une valeur critique du débit  $q_c$  telle que, si le système est initialement dans l'état laminaire et qu'on lui applique une perturbation d'amplitude finie (par exemple en rapprochant deux colonnes voisines à l'aide d'une tige), si  $q < q_c$  alors le système retourne à l'état laminaire, après un transitoire chaotique dont la durée diverge lorsque le débit tend vers  $q_c$  par valeurs inférieures, et si  $q > q_c$  alors la dynamique devient désordonnée et le système ne retourne jamais à l'état laminaire. On peut remarquer que si on augmente lentement le débit alors l'état laminaire peut subsister pour des valeurs de  $q$  supérieures à  $q_c$  : cet état laminaire est donc linéairement stable. Il est stable vis à vis de perturbations d'amplitude finie si  $q < q_c$  et instable vis à vis de telles perturbations si  $q > q_c$ . Lorsque le système a transité vers un état désordonné, on observe

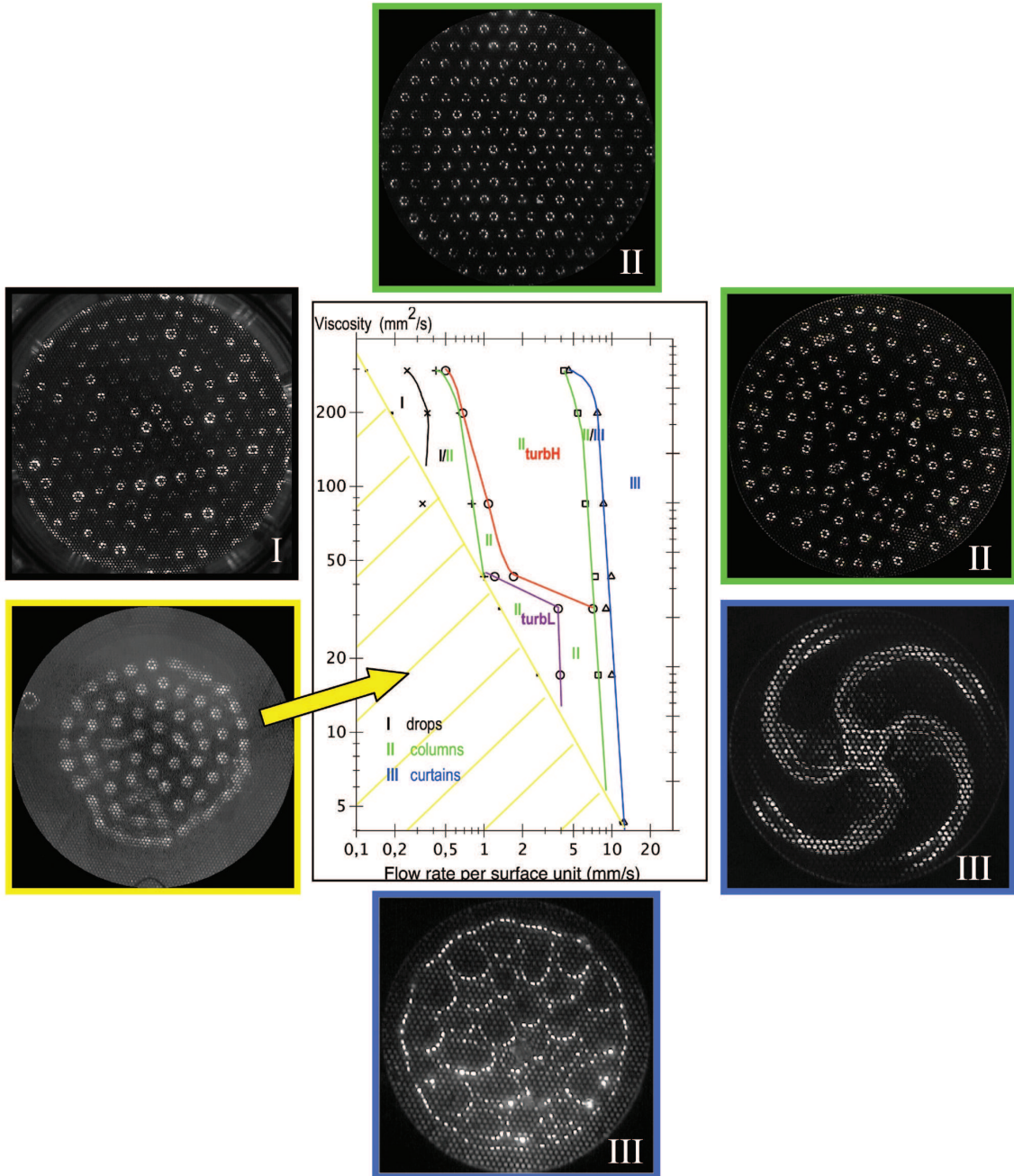


FIG. 9.2.: Diagramme des phases du système.

Selon les valeurs du débit et de la viscosité, le système peut être dans un régime de goutte à goutte (**I**), de colonnes (**II**) ou de nappes (**III**). Les colonnes peuvent être disposées sur un réseau hexagonal centré, ou se déplacer erratiquement. Les nappes peuvent s'organiser sous la forme de structures géométriques simples, comme des spirales en rotation ou des cellules. Dans la zone hachurée en jaune, la surface d'écoulement augmente proportionnellement avec le débit, de sorte que le débit surfacique reste constant.

de l'intermittence spatio-temporelle (IST, voir Fig. 9.3(a) et (b)), la fraction turbulente moyenne augmentant avec l'écart au seuil, c'est-à-dire avec le débit, jusqu'à ce que le chaos envahisse tout le système de façon permanente ( $q > q_2$ ). Près du seuil, la situation est un peu plus compliquée, car il y a bistabilité entre l'IST et un régime dans lequel seule la rangée de colonnes la plus proche des bords présente une dynamique désordonnée, de type IST à une dimension, l'intérieur du système étant stationnaire. On peut observer de temps en temps des incursions du désordre vers le centre du système (voir Fig. 9.3(c)). Parfois ces incursions sont suffisantes pour « rallumer » le désordre dans tout le système, qui repasse alors dans le régime d'IST. Puis la dynamique du cœur se calme, et le désordre n'existe plus que sur les bords, ... Par la suite on qualifiera ce régime de quasi-laminaire. Sa présence est clairement due au conflit entre l'organisation hexagonale des colonnes et les conditions aux bords circulaires. Quand le débit augmente le système passe de plus en plus de temps dans l'état d'IST. Au-delà d'une valeur  $q_1$  du débit, la bistabilité disparaît, le seul état possible étant alors l'IST. La dynamique est hystérétique : à débit croissant le système peut rester dans l'état laminaire pour des valeurs de  $q$  supérieures à  $q_c$ , tandis qu'à débit décroissant on observe de l'IST jusqu'au débit seuil  $q = q_c$ .

Dans le cas des basses viscosités (Fig. 9.4(b)), le comportement du système est différent. Ainsi, si ce dernier est dans l'état laminaire et qu'on diminue le débit, alors pour  $q < q_{c1}$  des oscillations de lignes apparaissent spontanément. La dynamique associée est déterministe (périodique), le système est donc toujours dans un état laminaire. Pour des valeurs du débit inférieures à  $q_{c2}$ , le désordre apparaît. L'état laminaire est toujours linéairement stable, mais les oscillations de lignes jouent le rôle de perturbations d'amplitude finie. C'est pourquoi il est impossible de trouver le système dans un état laminaire si  $q < q_{c2}$ . Une fois que le désordre est apparu, sous la forme d'IST, on observe un comportement similaire à celui obtenu avec les huiles de hautes viscosités, c'est-à-dire la bistabilité entre IST et régime quasi-laminaire près du seuil ( $q_{c2} > q > q_1$ ), et une augmentation de la fraction turbulente moyenne lorsqu'on s'éloigne du seuil (à débit décroissant), jusqu'à ce que le système soit entièrement chaotique. Dans ce cas il n'y a pas d'hystérésis.

Ainsi, les transitions à hautes et basses viscosités présentent deux différences essentielles : la première se fait à débit croissant et est hystérétique, la seconde se fait à débit décroissant et n'est pas hystérétique. L'absence d'hystérésis dans le second cas est due à la présence des oscillations de lignes, qui jouent le rôle de perturbations d'amplitudes finies.

On se propose dans les sections suivantes de caractériser plus finement ces deux types de transitions.

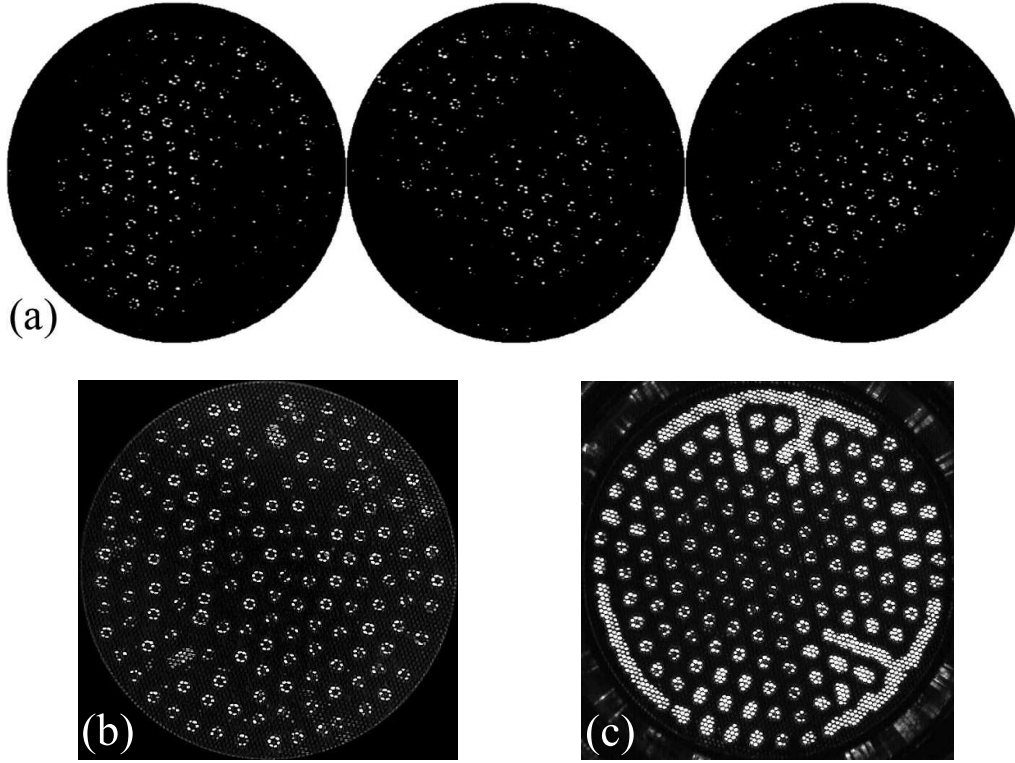


FIG. 9.3.: Le système, vu par le dessus, (a) et (b) dans le régime d'IST, et (c) dans l'état quasi-laminaire.

Les images (a) ont été moyennées sur 3 s, puis seuillées. Les zones désordonnées, dans lesquelles les colonnes ont bougé, apparaissent alors en noir (extrait de [71]).

(b) est un instantané. On distingue des régions laminaires, où les colonnes sont organisées sur un réseau hexagonal (à droite), et des domaines chaotiques, où il n'y a pas d'ordre spatial (en haut et en bas à gauche). Deux paires de colonnes sont en train de coalescer dans ces domaines.

(c) est le résultat d'une rémanence sur 3 s : on distingue les mouvements des colonnes pendant cet intervalle de temps. Les colonnes du bord présentent une dynamique de type IST à une dimension. On peut observer de temps en temps des incursions de ce désordre vers le centre du système.

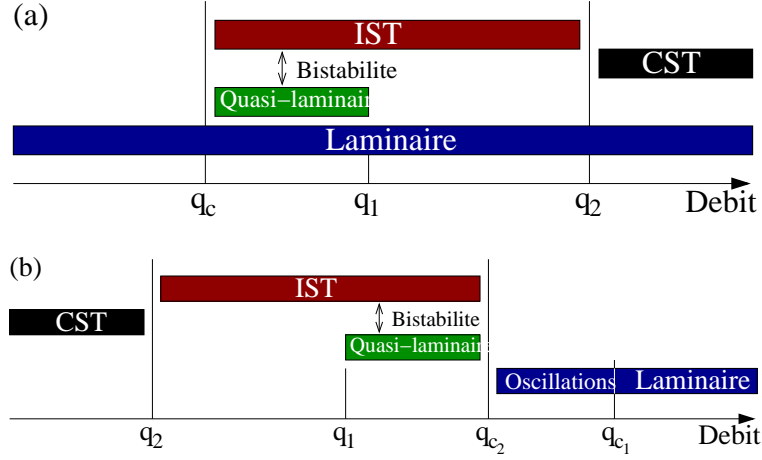


FIG. 9.4.: Diagrammes des phases qualitatifs pour les viscosités : (a)  $\nu \gtrsim 35 \text{ mm}^2/\text{s}$  et (b)  $\nu \lesssim 35 \text{ mm}^2/\text{s}$ .

#### 9.1.4. Les processus de créations/fusions

Avant de passer à l'étude quantitative de la transition, on s'intéresse aux processus de créations et fusions de colonnes, qui sont à la base de la perte de cohérence spatiale et donc de la transition vers le chaos.

Supposons qu'à cause des mouvements des colonnes leur densité devienne temporairement faible dans une région de l'écoulement. Dans ce cas, la gravité déstabilise le film de liquide, jusqu'à ce qu'une nouvelle colonne soit créée : le système a gagné une colonne.

À l'opposé, imaginons que deux colonnes se retrouvent proches l'une de l'autre sous l'effet de la dynamique. Dans ce cas, elles coalescent sous l'effet de la tension de surface : le système a globalement perdu une colonne.

Ainsi, les créations de colonnes sont gouvernées par la gravité, leurs fusions par la tension de surface. Comme dans le cas laminaire (instabilité de Rayleigh-Taylor avec flux), c'est bien la compétition gravité/tension de surface qui régit la dynamique du système.

## 9.2. Méthode d'étude

L'étude quantitative de ces transitions passe par des mesures statistiques. Pour cela on doit au préalable détecter automatiquement les colonnes. Le mode de visualisation du système, par le dessus et à travers les trous de la grille, en utilisant les propriétés de réfraction de la lumière par l'huile [9, 72], trouve ici ses limites en

rendant difficile la détection des colonnes par un procédé automatique. En effet, comme on le voit sur la figure 9.3(b), celles-ci apparaissent comme un ensemble de points lumineux, leurs centres sont noirs, et leurs luminosités varient fortement. La détection automatique des colonnes doit donc passer par un traitement d'image spécifique. Celui-ci a été effectué par Christophe Pirat, il est présenté en détail dans [72]. La procédure comporte une vingtaine d'étapes dont voici les plus significatives : après avoir décomposé une séquence vidéo en images distinctes, celles-ci subissent deux filtrages de Fourier successifs, chacun à haute et basse fréquences spatiales, puis un seuillage. Les colonnes apparaissent alors comme des objets bien contrastés et homogènes. Il est ainsi possible dans un dernier temps de détecter leurs positions sur chaque image.

J'ai réalisé le traitement de ces données, qui a permis d'obtenir les résultats présentés dans la section suivante. Nous avons étudié les transitions pour des huiles de viscosités  $\nu=20$ , 50 et 100 mm<sup>2</sup>/s. Dans chaque cas, pour sept valeurs du débit nous avons étudié des séquences de 32 minutes, enregistrées à un taux de 25 images par seconde<sup>1</sup>. Pour chaque valeur de la viscosité et du débit une séquence contient donc 48000 images. Il est ainsi possible d'avoir accès à des statistiques sur environ 6 millions de colonnes.

On présente dans la section suivante les résultats obtenus pour les viscosités typiques de 20 et 50 mm<sup>2</sup>/s, les résultats pour  $\nu=100$  mm<sup>2</sup>/s et  $\nu=50$  mm<sup>2</sup>/s étant qualitativement les mêmes.

## 9.3. Résultats

On caractérise généralement les transitions au chaos via intermittence spatio-temporelle par la mesure des exposants mentionnés au chapitre 8 (lorsque ceux-ci existent, c'est-à-dire si la transition est continue). Mais la mesure de ces exposants passe par la détection précise des zones laminaires et turbulentes, qui s'avère difficile dans notre système à cause de sa nature discrète et des différents types de mouvements qui peuvent avoir lieu dans les zones laminaires (défauts topologiques oscillants, oscillations de lignes). Nous avons donc utilisé différents types de traceurs permettant de définir plusieurs paramètres d'ordre. Comme on le verra par la suite, l'un d'eux nous a permis d'avoir accès à la fraction turbulente moyenne dans le système, et donc à l'exposant  $\beta$ , qui caractérise l'évolution de la fraction turbulente moyenne  $F_t$  près du seuil de la transition ( $F_t \propto (\varepsilon - \varepsilon_c)^\beta$  si  $\varepsilon$  est le paramètre de contrôle et  $\varepsilon_c$  sa valeur critique), que l'on pourra comparer à celui de la percolation dirigée. Ces différents traceurs sont :

---

<sup>1</sup>On verra par la suite que ce taux est suffisant pour détecter les principaux phénomènes mis en jeu dans la dynamique : créations, fusions, mouvements de colonnes.

- le nombre de colonnes. En effet, comme on le verra par la suite, ce nombre est maximal lorsque toutes les colonnes sont disposées sur un réseau hexagonal. Plus le système est désordonné, plus ce nombre est faible.
- la fraction de colonnes ayant six plus proches voisins. Cette fraction est égale à un si les colonnes sont disposées sur un réseau hexagonal centré.
- l'écart-type des distances entre plus proches voisins. Il est nul si les colonnes sont sur un réseau hexagonal.
- le taux de créations/fusions. Ce taux est nul lorsque le système est dans l'état laminaire.

### 9.3.1. Le nombre de colonnes

Sur la figure 9.5 sont représentées les distributions du nombre de colonnes  $N$  mesurées pour six valeurs du débit pour une huile de viscosité  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ . De (a) à (f) le débit est croissant, on s'éloigne donc du seuil. Le comportement le plus marquant est le fait que le nombre moyen de colonnes diminue quand l'écart au seuil augmente. Loin du seuil (Fig. 9.5(d-f)), la distribution semble être de type gaussien, avec un faible écart-type. Cette distribution sera caractérisée plus loin. Plus près du seuil de la transition (Fig. 9.5(b) et (c)), la distribution est bimodale : le système est bistable. Le pic correspondant aux valeurs du nombre de colonnes le plus grand est associé au régime quasi-laminaire, le second pic au régime d'IST. Ce dernier continue à se décaler vers les grandes valeurs de  $N$  lorsqu'on s'approche du seuil. Plus près du seuil, ces deux pics sont confondus : le système se trouve alors dans un régime mixte entre l'IST et le régime quasi-laminaire, le désordre venant essentiellement des bords mais envahissant la totalité du système.

La figure 9.6 représente la distribution du nombre de colonnes  $N$  pour six valeurs du débit pour une huile de viscosité  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Le débit est croissant de (a) à (f), on se rapproche donc du seuil. À part le fait qu'on s'approche du seuil en augmentant le débit au lieu de le diminuer, le comportement est analogue à celui observé pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Ainsi, loin du seuil la distribution est de type gaussien, le pic se décalant vers les grandes valeurs de  $N$  quand l'écart au seuil diminue. La distribution devient également bimodale plus près du seuil (Fig. 9.6(d-f)), mais cette fois les deux pics ne coalescent jamais : au plus près du seuil, le pic associé à l'IST (faibles valeurs de  $N$ ) se dépeuple au profit de celui associé au régime quasi-laminaire (grandes valeurs de  $N$ ). Ainsi, pour des valeurs de  $q$  tendant vers  $q_c$  (par valeurs inférieures) le système est de plus en plus souvent dans l'état quasi-laminaire. Le débit  $q_c$  est celui à partir duquel le désordre sur les bords disparaît.

On a constaté que, pour les deux viscosités typiques, le nombre de colonnes  $N$  augmentait quand on s'approchait du seuil, c'est-à-dire quand le désordre diminuait. On peut alors envisager de définir comme paramètre d'ordre du système la quantité  $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$ , où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne temporelle, et où  $N_{lam}$  est le nombre



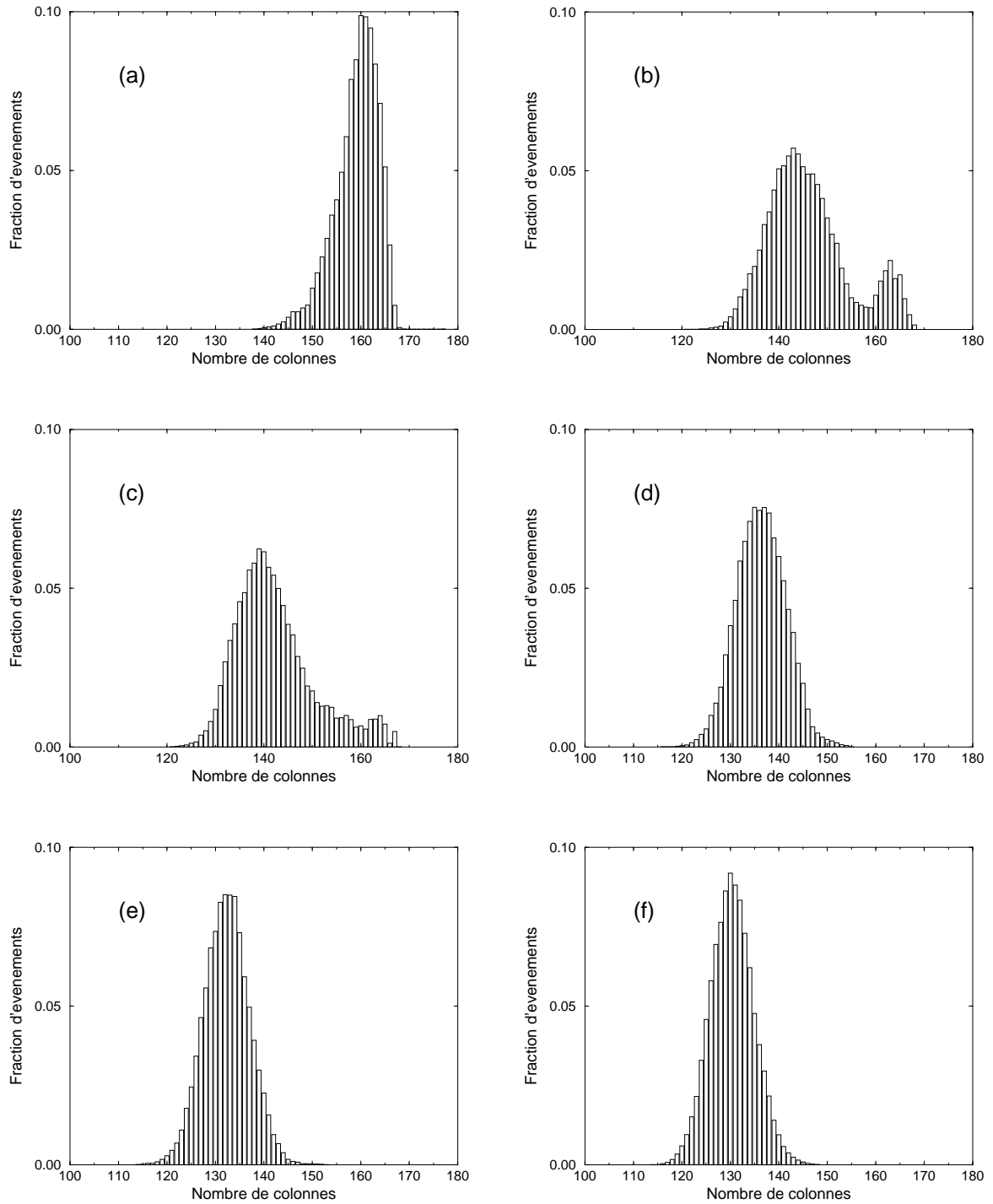


FIG. 9.5.: Distributions du nombre de colonnes pour une huile de viscosité  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et pour des débits de : (a)  $32,4 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (b)  $37,4 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (c)  $45,5 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (d)  $53,3 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (e)  $64,3 \text{ cm}^3/\text{s}$  et (f)  $74,1 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

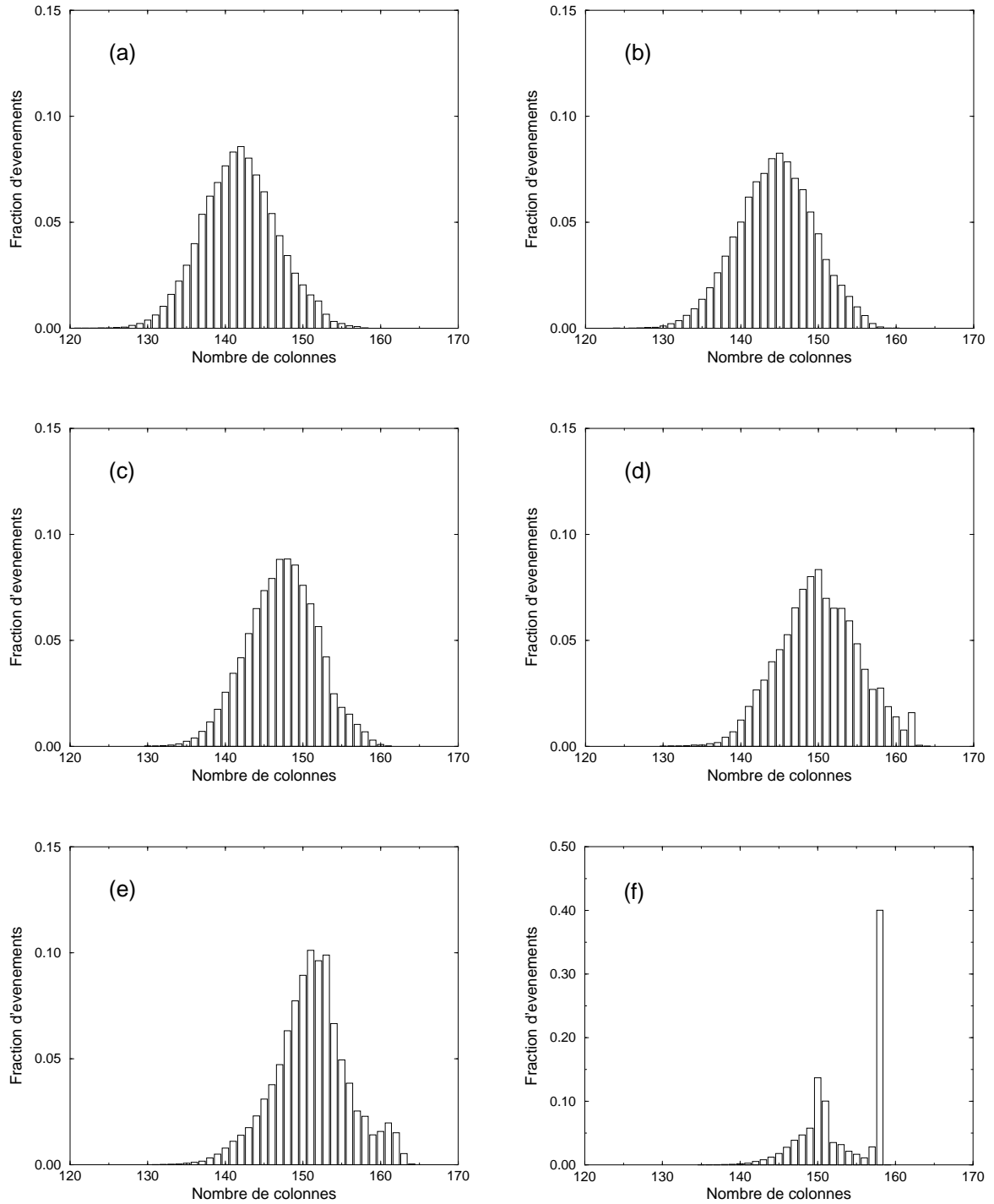


FIG. 9.6.: Distributions du nombre de colonnes pour une huile de viscosité  $20 \text{ mm}^2/\text{s}$  et pour des débits de : (a)  $63,4 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (b)  $67,1 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (c)  $71,4 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (d)  $75,6 \text{ cm}^3/\text{s}$ , (e)  $78,9 \text{ cm}^3/\text{s}$  et (f)  $80,6 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

de colonnes dans l'état laminaire (qui est aussi le nombre maximal de colonnes).  $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$  semble pouvoir jouer le rôle de paramètre d'ordre du système car il est nul dans l'état laminaire et augmente avec le désordre. Les diagrammes des phases associés à ce paramètre sont représentés sur la figure 9.7, pour les deux viscosités typiques. On a utilisé comme paramètres de contrôle les débits réduits :  $\varepsilon_h = \frac{q - q_c^h}{q_c^h}$ , avec  $q_c^h = 31 \pm 1 \text{ cm}^3/\text{s}$ , pour  $\nu = 50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et  $\varepsilon_l = \frac{q_c^l - q}{q_c^l}$ , où  $q_c^l = 81 \pm 2 \text{ cm}^3/\text{s}$ , pour  $\nu = 20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . La valeur de  $q_c^h$  a été déterminée grâce à l'ajustement des données en loi de puissance. Dans le régime de bistabilité on a calculé séparément les moyennes dans les deux modes. La branche associée à la transition au chaos spatio-temporel (branche du haut) suit une loi de puissance d'exposant  $0,22 \pm 0,05$  dans le cas  $\nu = 50 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Dans le cas  $\nu = 20 \text{ mm}^2/\text{s}$  cette branche ne vérifie clairement pas une loi de puissance : comme on l'a vu sur la figure 9.6, le nombre de colonnes dans l'état d'IST ne peut dans ce cas jamais être très grand. Ceci peut se comprendre grâce au fait que, pour les huiles de faible viscosité, la dynamique laminaire près du seuil est marquée par la présence d'oscillations de lignes en opposition de phase. Ces oscillations ont tendance à rapprocher des colonnes voisines et facilitent donc leur coalescence, amplifiant par là même tout désordre existant au préalable. Le système ne peut donc pas être faiblement désordonné. Les oscillations de lignes en opposition de phase semblent masquer le caractère continu de la transition.

### 9.3.2. La fraction d'hexa et la distribution des distances entre plus proches voisins

Une façon commode de mesurer l'organisation spatiale d'objets discrets consiste à utiliser la construction de Voronoï [79]. Cette construction permet de distinguer les plus proches voisins (ppv) de chaque objet, et donc d'avoir accès à leur nombre et à leurs distances par rapport à l'objet considéré. Avant de montrer les résultats de cette étude, on présente la méthode utilisée.

#### Méthode utilisée

J'ai programmé en langage C un algorithme qui permet de tracer la maille de Wigner-Seiz de chaque colonne (non périphérique), à partir des positions de ces objets sur chaque image. On ne cherche pas les ppv des colonnes périphériques (la maille de Voronoï de ces objets n'existe pas), mais on peut les considérer comme ppv d'autres colonnes. La procédure permet également de compter le nombre de faces de la maille, qui est aussi le nombre de ppv de la colonne considérée. Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

- on cherche les 10 colonnes les plus proches de la colonne considérée ( $C_0$ ). Les ppv sont certains de ces objets

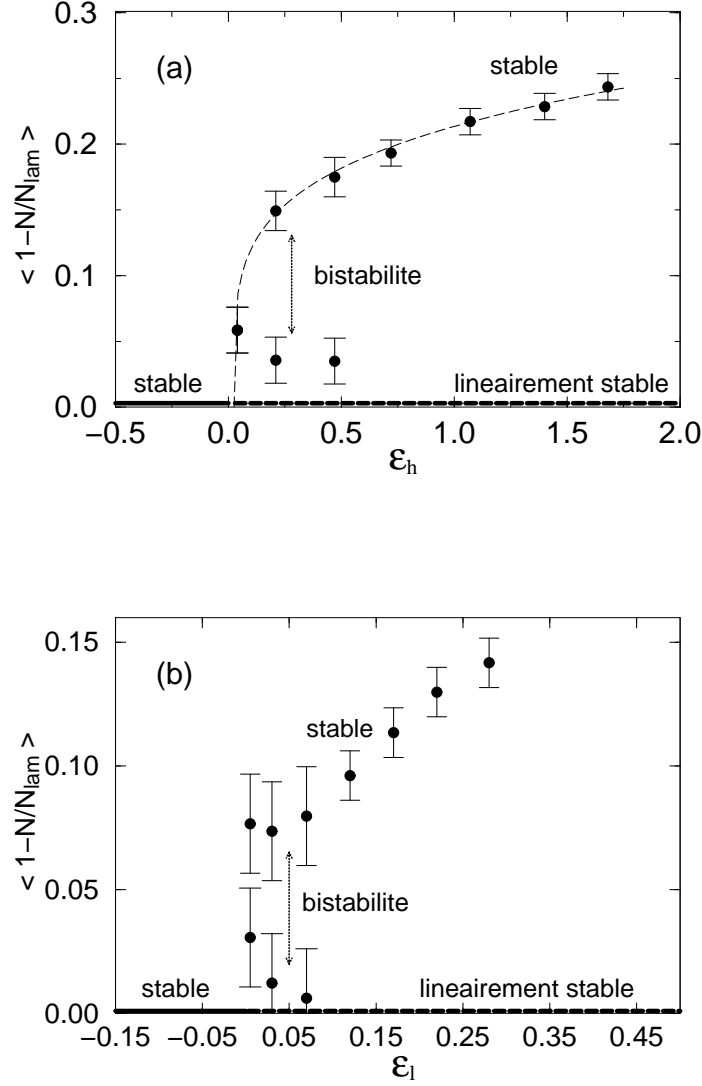


FIG. 9.7.: Diagrammes des phases où on a choisi comme paramètre d'ordre la quantité  $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$  : (a)  $\nu = 50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et (b)  $\nu = 20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Dans les deux cas, l'état laminaire (ligne  $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle = 0$ ) est stable pour  $\varepsilon < 0$  et linéairement stable (stable vis à vis de perturbations infinitésimales) pour  $\varepsilon > 0$ . Après avoir subi une perturbation d'amplitude finie, le système quitte cet état et évolue près du seuil entre la branche supérieure (désordre avec IST) et la branche inférieure (état quasi-laminaire), et plus loin du seuil uniquement sur la branche stable supérieure, jusqu'au chaos spatio-temporel. En (a) la branche supérieure suit une loi de puissance. Dans le régime de bistabilité, on a séparé les deux régimes en distinguant les états pour lesquels  $N$  est supérieur (quasi-laminaire) ou inférieur (IST) à (a) 157 et (b) 161 pour  $\varepsilon_l = 0,07$ , 159 pour  $\varepsilon_l = 0,03$  et 156 pour  $\varepsilon_l = 0,005$ .

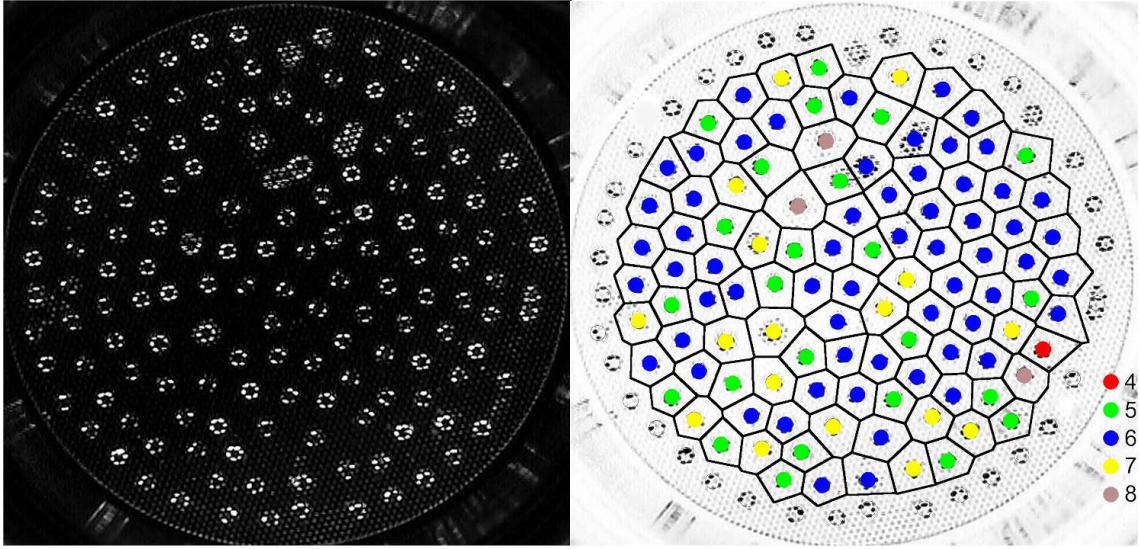


FIG. 9.8.: Une image typique (à gauche) et sa construction de Voronoï superposée (à droite). La légende indique le nombre de plus proches voisins de chaque colonne. On distingue des zones laminaires, où tous ces objets ont six ppv, et d'autres chaotiques, où le nombre de ppv est variable.

- on se place au milieu du segment dont les extrémités sont les centres de la colonne  $C_0$  et de la plus proche de ses voisines,  $C_1$
- on avance sur la médiatrice de ce segment par pas de 0,05 pixel. À chaque pas on vérifie que, parmi les 10 colonnes sélectionnées au début de la procédure, la plus proche du point où l'on se trouve est toujours  $C_1$
- lorsque ce n'est plus le cas, on se met à suivre la médiatrice du segment dont les extrémités sont les centres de  $C_0$  et de la colonne qui est devenue la proche. Les sens de parcours des médiatrices sont tels que l'on tourne autour de  $C_0$  toujours dans le même sens. On s'est fixé le sens trigonométrique
- on continue ainsi jusqu'au retour au point de départ. Le nombre de fois où il a été nécessaire de changer de médiatrice est le nombre de faces de la maille, et donc le nombre de ppv

Le résultat de cet algorithme sur une image est montré sur la figure 9.8.

### La fraction d'hexa

On peut construire un paramètre d'ordre basé sur le nombre de ppv car toutes les colonnes appartenant à une zone laminaire *sans défauts topologiques* ont six plus proches voisins ( $n_{ppv} = 6$ ), alors que celles se trouvant dans une région chaotique en ont un nombre a priori quelconque, puisqu'il n'y a pas de structure spatiale dans ces domaines. En notant  $f$  la fraction de colonnes ayant six ppv (qu'on appellera

également par la suite fraction d'hexa), on doit avoir  $\langle 1 - f \rangle = 0$  dans l'état laminaire (sans défauts) et  $\langle 1 - f \rangle$  de plus en plus grand lorsque le désordre augmente. Pour vérifier ceci, on a représenté sur les figures 9.9 et 9.10 les distributions de  $f$  respectivement pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ , à débit croissant.

Les distributions mesurées pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  présentent un excellent accord qualitatif avec celles du nombre de colonnes (figure 9.5). Dans ce cas, le nombre de colonnes est donc parfaitement relié à leur disposition : le réseau hexagonal est le moyen de « placer » le nombre maximum d'objets (compte tenu qu'il existe une distance minimale entre eux, en-dessous de laquelle ils fusionnent). Nous avons vérifié cette assertion en comparant les évolutions temporelles du nombre de colonnes et de la fraction d'hexa : les grandes valeurs de  $N$  sont toujours associées aux grandes valeurs de  $f$ .

L'accord entre les distributions de  $N$  (Fig. 9.6) et de  $f$  (Fig. 9.10) est moins bon pour une huile de viscosité  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ , surtout près du seuil. En particulier, on distingue moins nettement la bistabilité sur les distributions de fraction d'hexa (Fig. 9.6 et 9.10 (d) et (e)), et au plus près du seuil les deux pics de la distribution de  $f$  ne sont pas séparés comme ceux de la distribution de  $N$  (Fig. 9.6 et 9.10 (f)). Ces différences viennent de la présence des oscillations de lignes, à cause desquelles toutes les colonnes n'ont pas six ppv dans les zones laminaires. Il est donc difficile de distinguer grâce à  $f$  le régime quasi-laminaire de l'IST.

On a représenté sur la figure 9.11 le paramètre  $\langle 1 - f \rangle$  en fonction du débit pour les deux viscosités typiques. Dans le régime de bistabilité les deux branches ont été séparées en choisissant le même critère que sur la figure 9.7. On distingue dans les deux cas une branche supérieure, associée à la transition au chaos par IST, et une branche inférieure associée au régime quasi-laminaire. Cette fois la branche supérieure semble suivre une loi de puissance pour les deux viscosités. Les exposants de ces lois sont  $0,10 \pm 0,05$  pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et  $0,37 \pm 0,05$  pour  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . La faible valeur du premier de ces exposants peut cependant laisser un doute quant à la nature de la transition, qui pourrait être discontinue.

### Les distances entre ppv

Un autre renseignement intéressant donné par la construction de Voronoï est la distance entre ppv. On s'attend en effet à ce que ces distances soient toutes égales lorsque le système est dans l'état laminaire sans défaut, ce qui ne doit a priori pas être le cas s'il est dans un état désordonné. Dans ces conditions, l'écart-type des distances entre ppv  $\sigma_d$  devrait être nul dans le cas où le système est dans l'état laminaire, et augmenter avec le désordre.

Les figures 9.12(a) et (b) représentent ainsi les distributions des distances entre ppv pour  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$  pour deux valeurs différentes du débit. Comme on s'y attendait, la distribution loin du seuil (Fig. 9.12(a)) est beaucoup plus étalée que celle plus proche

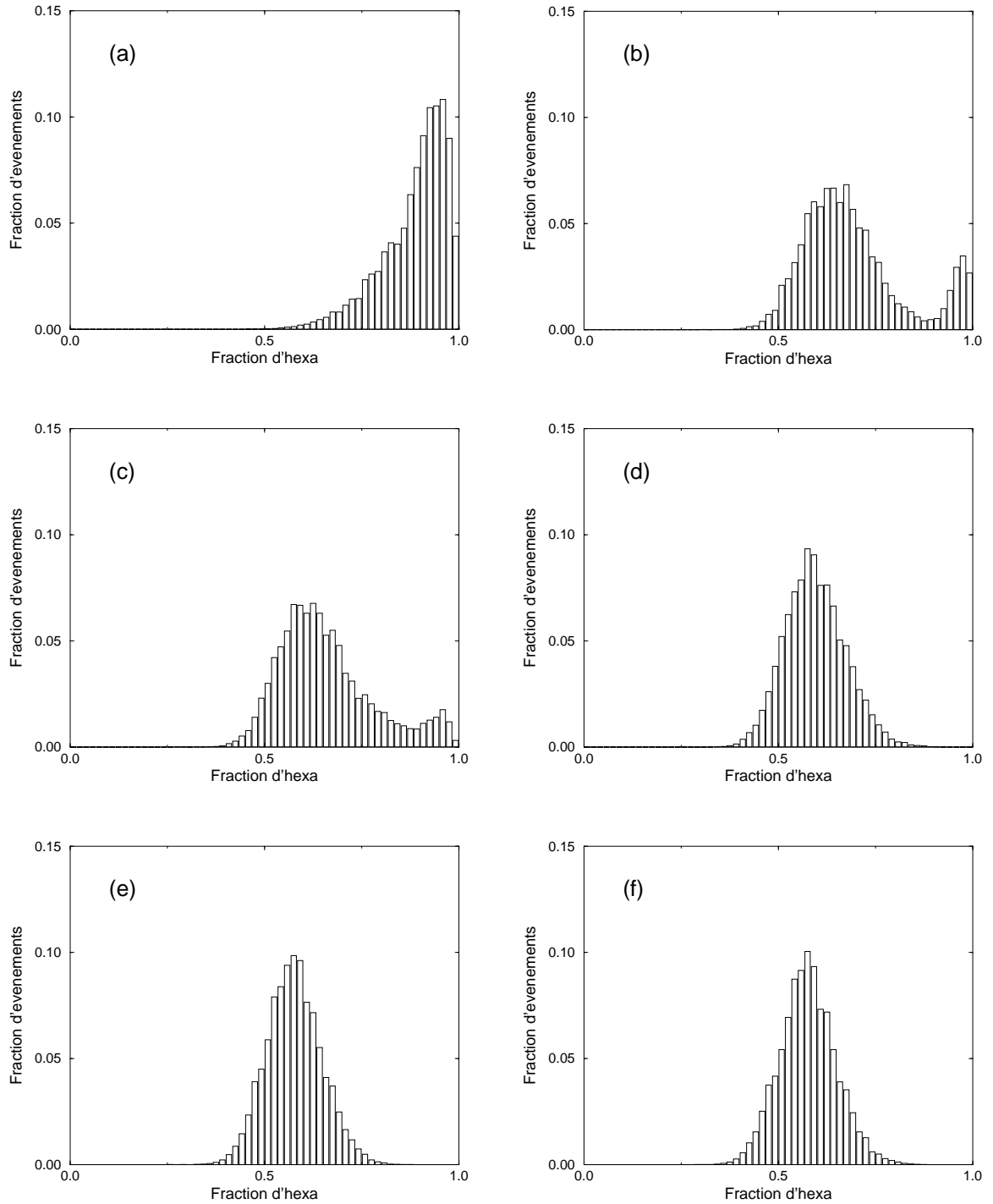


FIG. 9.9.: Distributions de la fraction d'hexa pour une huile de viscosité  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$ .  
Les débits sont les mêmes que sur la figure 9.5.

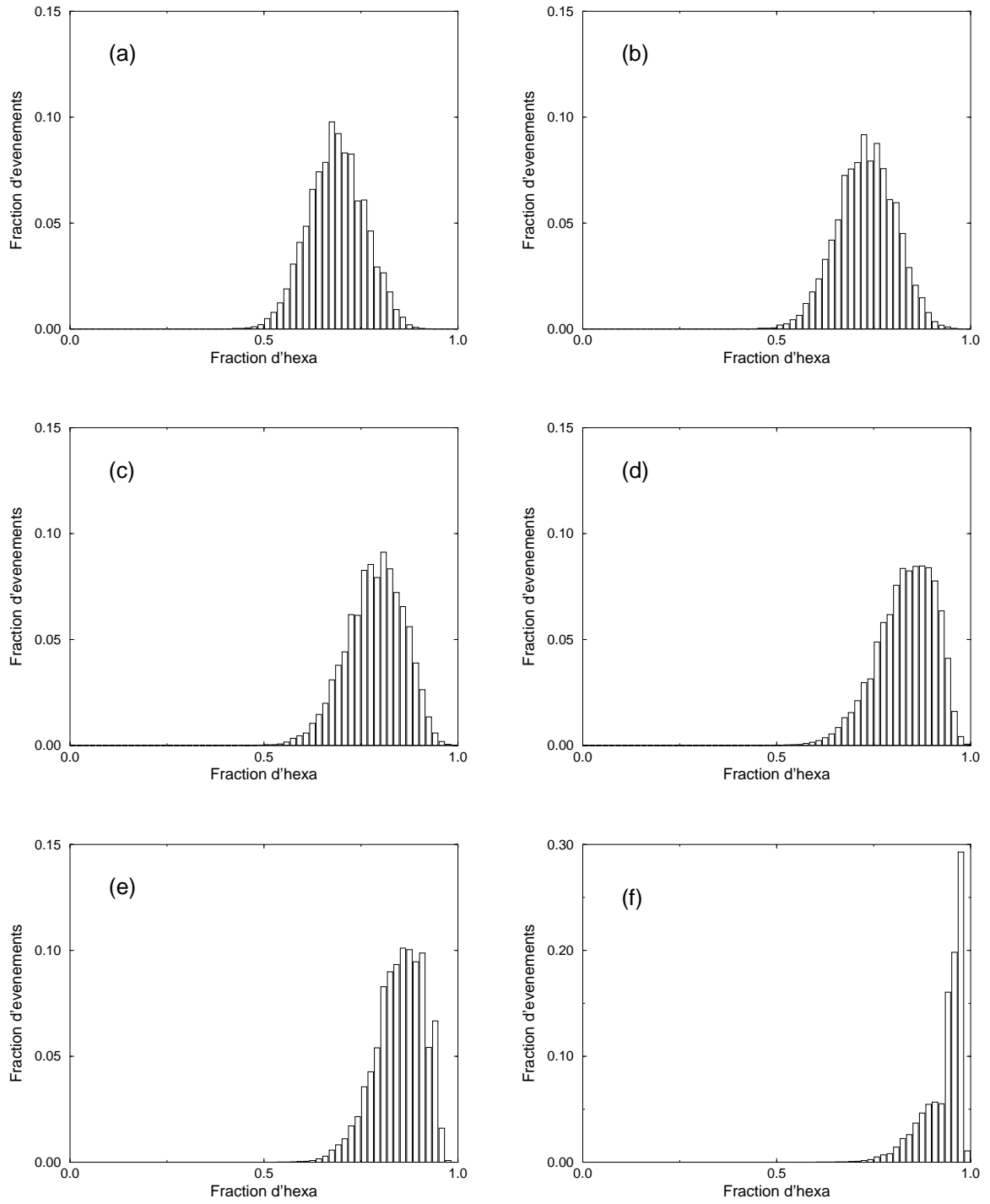


FIG. 9.10.: *Distributions de la fraction d'hexa pour une huile de viscosité  $20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Les débits sont les mêmes que sur la figure 9.6.*



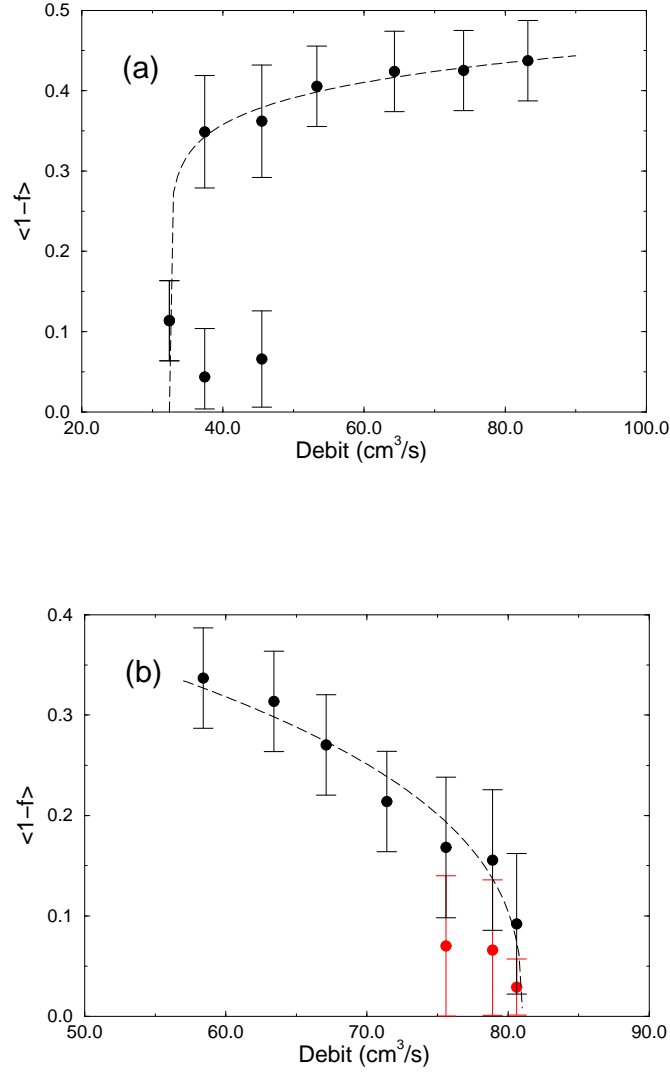


FIG. 9.11.: Diagrammes des phases où on a choisi comme paramètre d'ordre la quantité  $\langle 1 - f \rangle$  : (a)  $\nu = 50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et (b)  $\nu = 20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Dans le régime de bistabilité les deux branches ont été séparées en utilisant le même critère que sur la figure 9.7.

du seuil (Fig. 9.12(b)). On remarque cependant que dans tous les cas la distance entre ppv la plus probable est de l'ordre de 11,6 mm, la longueur d'onde du réseau hexagonal. Cette constatation signe le fait que l'instabilité de Rayleigh-Taylor est toujours sous-jacente à la dynamique.

L'élargissement de la distribution quand l'écart au seuil augmente permet donc d'utiliser son écart-type  $\sigma_d$  comme un troisième paramètre d'ordre potentiel. On a ainsi représenté sur les figures 9.12(c) et (d)  $\sigma_d$  en fonction du débit pour les deux viscosités étudiées. Les deux branches ont été séparées en utilisant le même critère que sur la figure 9.7. La branche supérieure, associée à la transition au chaos, peut être ajustée par une loi de puissance pour les deux viscosités. Les exposants de ces lois sont  $0,14 \pm 0,05$  pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et  $0,10 \pm 0,05$  pour  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Les faibles valeurs de ces exposants peuvent signer le fait que la transition pourrait être discontinue.

### 9.3.3. Le nombre de créations/fusions

#### 9.3.3.1. Un paramètre d'ordre

Un autre paramètre d'ordre naturel est relié au nombre de créations/fusions (C/F). En effet, dans une zone laminaire ce nombre est nul, tandis qu'il est non nul dans une région désordonnée. Nous avons donc mesuré le nombre de C/F entre chaque paire d'images consécutives.

#### Méthode employée

Le traitement d'image fournit le nombre et la position des colonnes sur chaque image. Pour déduire de ces données le nombre de C/F entre deux images  $i$  et  $i + 1$ , séparées d'un intervalle de temps  $\Delta t=1/25 \text{ s}$ , j'ai utilisé la méthode suivante.

On considère chaque colonne de l'image  $i + 1$  et on cherche si elle vient d'être créée, si elle est le résultat de la fusion de deux colonnes de l'image précédente, ou si elle s'est simplement déplacée. Pour cela on calcule les distances entre cette colonne et toutes celles de l'image  $i$ , et on les note  $d_1 < d_2 < d_3 < \dots$ . Grâce à des tests préliminaires, j'ai déterminé les valeurs de deux paramètres  $v_{max}$  et  $d_{min}$  tels que :

- si  $d_1 > v_{max}\Delta t$ , alors on considère que la colonne vient d'être créée : elle n'a pas pu bouger aussi vite
- si  $d_2 < d_{min}$ , alors on suppose qu'elle est le résultat de la fusion de deux autres : la deuxième colonne de l'image précédente la plus proche a forcément été attirée
- si aucune de ces deux conditions n'est remplie, alors on considère que la colonne s'est simplement déplacée

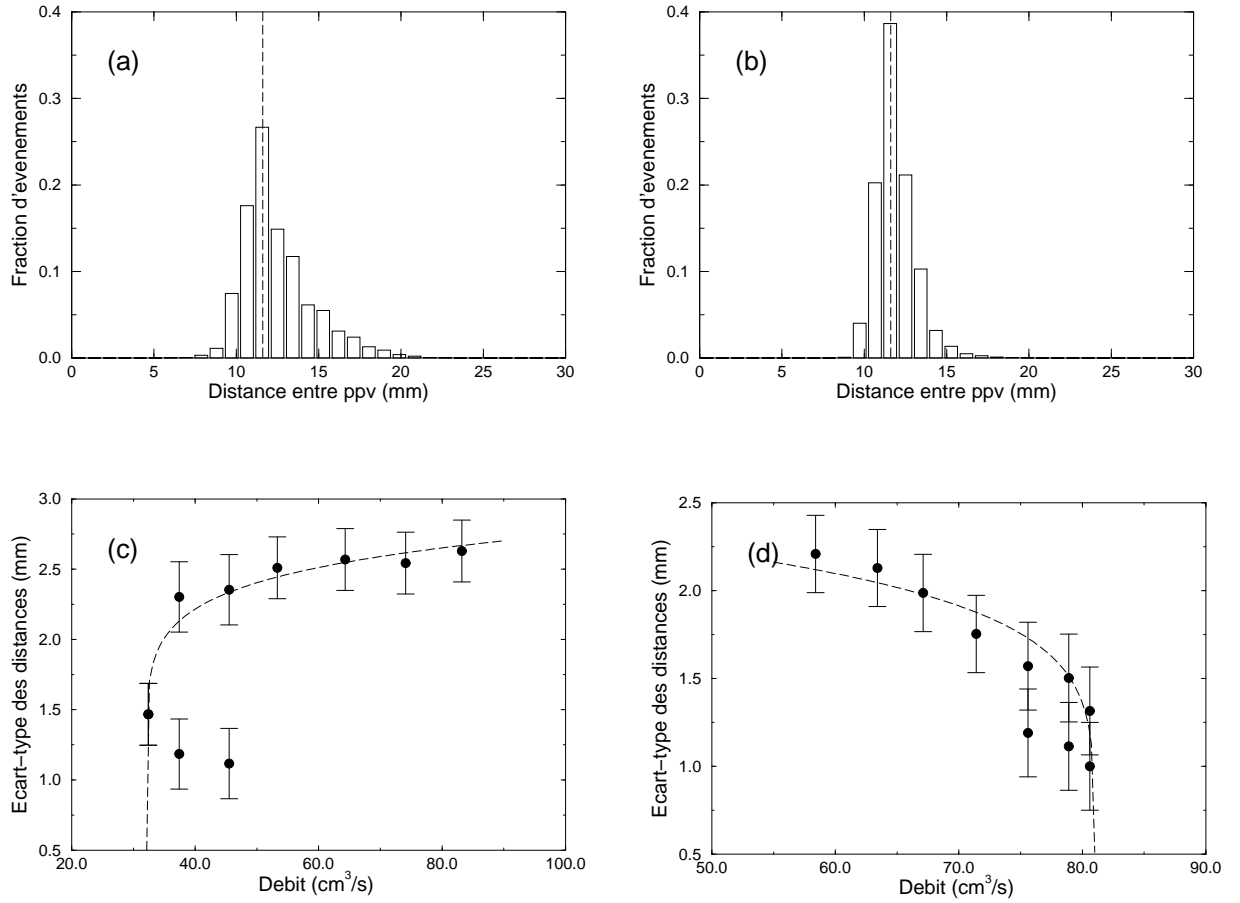


FIG. 9.12.:

(a) et (b) Distributions des distances entre ppv pour une huile de viscosité  $\nu=20$  mm<sup>2</sup>/s aux débits de (a) 63,4 cm<sup>3</sup>/s (loin du seuil) et (b) 80,6 cm<sup>3</sup>/s (près du seuil). Les lignes en pointillés indiquent la valeur de la longueur d'onde du réseau hexagonal.

(c) et (d) Diagrammes des phases où on a choisi comme paramètre d'ordre  $\sigma_d$ , l'écart-type des distances entre ppv : (c)  $\nu=50$  mm<sup>2</sup>/s et (d)  $\nu=20$  mm<sup>2</sup>/s. Dans le régime de bistabilité les deux branches ont été séparées en utilisant le même critère que sur la figure 9.7.

### Diagramme des phases résultant

Près du seuil, on peut considérer que la densité de C/F dans une région désordonnée est constante<sup>2</sup>. Leur nombre étant nul dans les zones laminaires, on en déduit donc que la fraction du système se trouvant dans l'état désordonné est égale au nombre total de C/F divisé par le nombre de colonnes. Ces considérations sont bien sûr vraies en moyenne temporelle. On a donc représenté sur la figure 9.13 la moyenne du nombre total de créations et de fusions ayant eu lieu entre deux images consécutives divisé par le nombre de colonnes présentes sur la première,  $\langle (C_i + F_i)/N_i \rangle$ , en fonction du paramètre de contrôle  $\varepsilon_h$ , pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$ .  $C_i$  et  $F_i$  sont respectivement le nombre de créations et de fusions ayant eu lieu entre les images  $i$  et  $i+1$ , et  $N_i$  est le nombre de colonnes dans l'image  $i$  :  $\langle (C_i + F_i)/N_i \rangle = \sum_{i=1}^{NI-1} (C_i + F_i)/N_i$  ( $NI$  est le nombre d'images d'une séquence). La branche supérieure, caractéristique de la transition au chaos spatio-temporel, suit une loi de puissance d'exposant  $0,56 \pm 0,05$ .

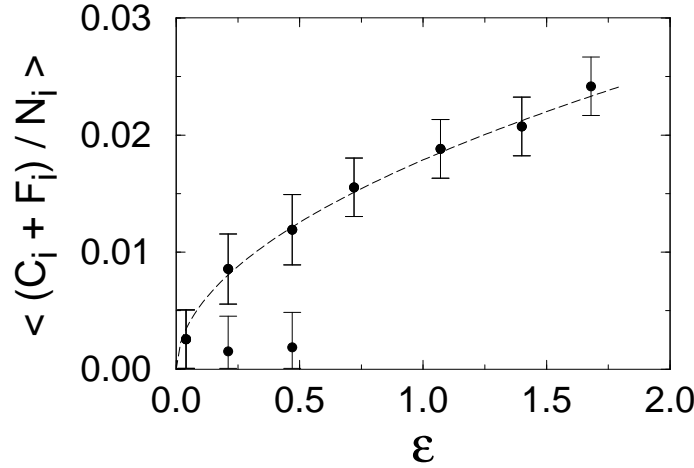


FIG. 9.13.: Diagrammes des phases où on a choisi comme paramètre d'ordre la fraction de C/F, pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Dans le régime de bistabilité les deux branches ont été séparées en utilisant le même critère que sur la figure 9.7.

<sup>2</sup>Cette hypothèse n'est plus vraie loin du seuil, car une fois que le désordre a envahi tout le système une augmentation du paramètre de contrôle conduit à une augmentation de l'agitation locale, et donc de la densité de C/F.

### 9.3.3.2. Caractérisation de la distribution de $N$ loin du seuil

Les C/F gouvernent également la dynamique du nombre de colonnes du système  $N$ . En particulier, la distribution de  $N$  peut être caractérisée par la mesure des taux de C/F  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  définis par les relations [80, 81] :

$$\begin{aligned}\Gamma_+(N) &= \langle C_{i \in \alpha(N)} \rangle \\ \Gamma_-(N) &= \langle F_{i \in \alpha(N)} \rangle\end{aligned}$$

où  $\alpha(N)$  est l'ensemble des indices des images pour lesquelles il y a  $N$  colonnes.

$\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  sont donc les nombres moyens de créations et de fusions se produisant pendant  $\Delta t = 1/25$  s lorsqu'il y a  $N$  colonnes dans le système. La mesure de ces quantités loin et près du seuil donne les résultats présentés sur les figures 9.14(a) et (b). Les figures 9.14(c) et (d) montrent les distributions de  $N$  correspondantes.

Loin du seuil (Fig. 9.14(a)), le taux de créations décroît linéairement lorsque  $N$  augmente : la densité d'objets dans le système étant de plus en plus grande, il y a de moins en moins de créations de colonnes. Le taux de fusions  $\Gamma_-$  est une fonction croissante de  $N$  : plus la densité augmente, plus la probabilité que deux colonnes se rencontrent et coalescent est importante. Il est surprenant que  $\Gamma_-$  soit une fonction quasi-linéaire de  $N$  : on s'attendait plutôt à une dépendance quadratique en  $N$ , car la probabilité de rencontre de deux colonnes est a priori multiple de  $N \times N$ . Pour les grandes valeurs de  $N$ , le taux de fusions est décroissant : ce comportement n'est pas surprenant car les grandes valeurs de  $N$  correspondent à des situations où le désordre est faible. Les taux  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  s'intersectent une fois. L'intersection est un point fixe stable, associé à un maximum de probabilité de  $N$  (Fig. 9.14(c)).

Plus près du seuil (Fig. 9.14(b)), le taux de créations décroît aussi linéairement en  $N$ . Par contre, la dépendance en  $N$  du taux de fusions est plus compliquée : la courbe  $\Gamma_-(N)$  coupe trois fois  $\Gamma_+(N)$ . Deux de ces intersections sont des points fixes stables, correspondant à des maxima de probabilité de  $N$  (Fig. 9.14(d)). La troisième est un point fixe instable, associée à un minimum de probabilité de  $N$ . La dépendance complexe en  $N$  de  $\Gamma_-$  est donc responsable de la bimodalité de la distribution du nombre de colonnes, et par là même de la bistabilité du système dans une gamme de valeurs du débit.

On a vu que loin du seuil il était possible d'approximer les taux  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  par des fonctions linéaires. La simplicité de ces fonctions permet de calculer analytiquement la distribution de  $N$  associée, selon la méthode exposée en [80].

Dans le cas général, on peut en effet écrire l'équation maîtresse pour la probabilité  $p(N, t)$  d'avoir  $N$  objets à l'instant  $t$  :

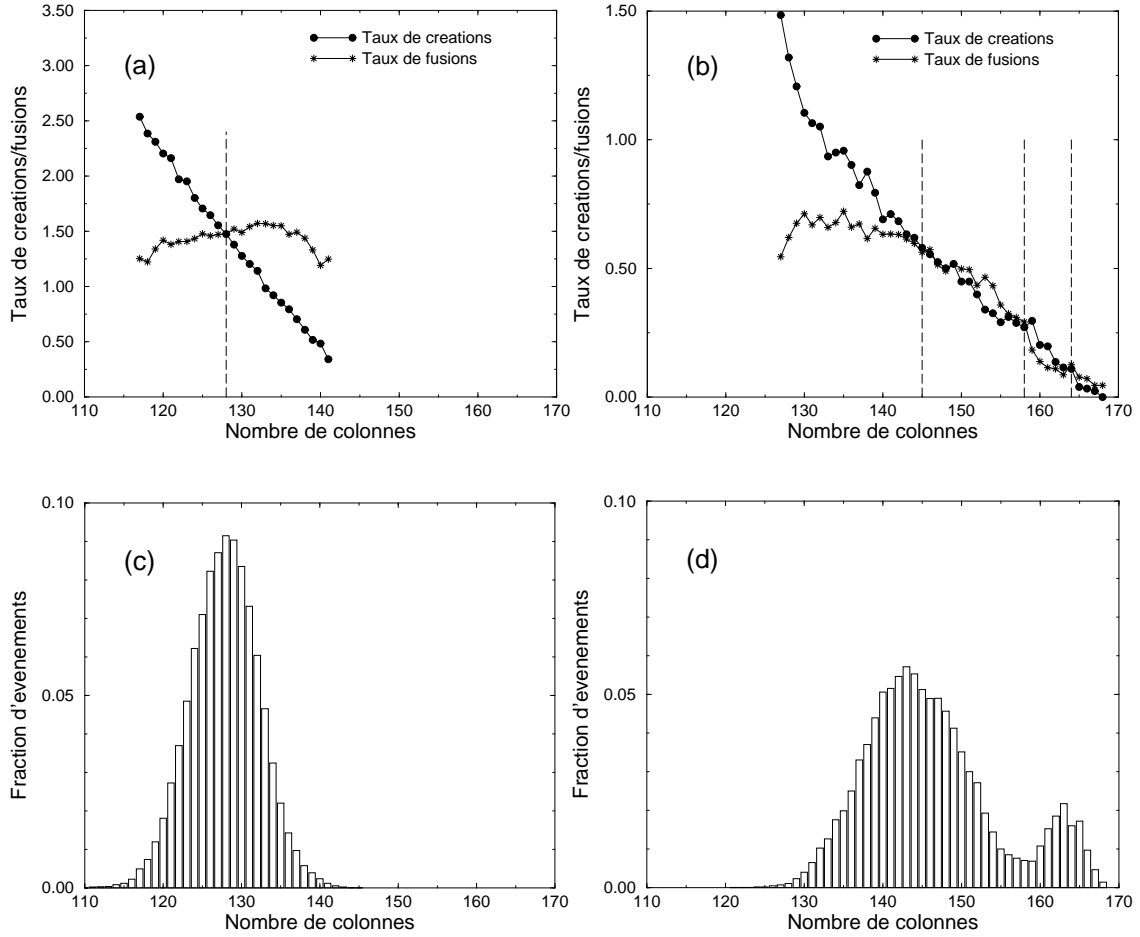


FIG. 9.14.:

(a) et (b) Taux de créations/fusions  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  pour une huile de viscosité  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  aux débits de (a)  $83,2 \text{ cm}^3/\text{s}$  (loin du seuil) et (b)  $37,4 \text{ cm}^3/\text{s}$  (près du seuil).

(c) et (d) Distributions du nombre de colonnes  $N$  aux mêmes valeurs de la viscosité et du débit : (c)  $83,2 \text{ cm}^3/\text{s}$  et (d)  $37,4 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Les maxima (resp. minima) de probabilité correspondent aux points fixes stables (resp. instables) de la dynamique de  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$ .

$$\begin{aligned} p(N, t + dt) = & p(N, t) - [\Gamma_+(N) + \Gamma_-(N)] p(N, t) dt \\ & + \Gamma_-(N+1) p(N+1, t) dt \\ & + \Gamma_+(N-1) p(N-1, t) dt \end{aligned}$$

où on a seulement supposé que les taux  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  étaient indépendants du temps, et que pendant  $dt$  il ne pouvait pas y avoir plus d'une création et plus d'une fusion.

Dans le régime asymptotique, c'est-à-dire quand  $p(N, t) = p(N, t + dt) \equiv p_N$ , cette équation devient :

$$\Gamma_+(N)p_N = \Gamma_-(N+1)p_{N+1} \quad (9.1)$$

Dans notre système, loin du seuil, on a raisonnablement :

$$\begin{cases} \Gamma_-(N) &= aN \\ \Gamma_+(N) &= c - bN \end{cases} \quad (9.2)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes.

En notant  $N_0 = c/b$  et  $\alpha = a/b$  et en introduisant la fonction génératrice  $G(z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N p_N$ , les équations (9.1) et (9.2) impliquent :

$$N_0 G(z) = (z + \alpha) G'(z)$$

La solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition de normalisation  $G(1) = 1$  est :

$$G(z) = \left( \frac{z + \alpha}{1 + \alpha} \right)^{N_0}$$

Or, une fonction génératrice de la forme  $G(z) = [zq + (1 - q)]^{N_0}$  est associée à la loi binomiale  $p(N) = \frac{N_0!}{N!(N_0-N)!} q^N (1 - q)^{N_0-N}$  [82].

Sur la figure 9.15 sont superposées la distribution de la Fig. 9.14(c) avec la binomiale telle que  $N_0 = c/b$  et  $q = 1/(1 + a/b)$ , les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant obtenues par ajustement des courbes  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  sur la Fig. 9.14(a). Les deux distributions sont en bon accord. La distribution du nombre de colonnes dans le régime de chaos spatio-temporel est donc bien une binomiale.

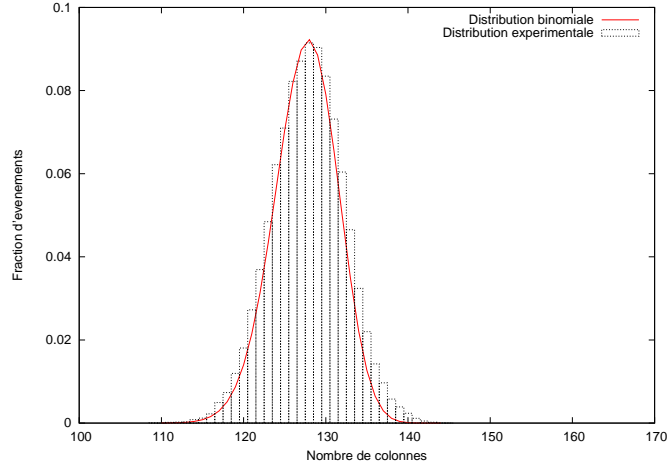


FIG. 9.15.: Loi binomiale dont les paramètres sont déduits du fit de  $\Gamma_+(N)$  et  $\Gamma_-(N)$  sur la Fig. 9.14(a) superposée à la distribution du nombre de colonnes mesurée expérimentalement (Fig. 9.14(c)).

## 9.4. Discussion

Nous avons caractérisé les transitions au chaos spatio-temporel pour les huiles de viscosités typiques  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$  et  $\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$ , à l'aide de quatre traceurs différents : le nombre de colonnes, la fraction d'entre elles ayant six plus proches voisines, l'écart-type des distances entre ppv et la fraction de créations/fusions. Les diagrammes des phases construits à partir des paramètres d'ordre dérivés de ces traceurs sont concordants d'un point de vue qualitatif (au moins pour  $\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$ ). Ils montrent tous une augmentation progressive du désordre à partir du seuil de la transition, ainsi qu'un régime de bistabilité près de celui-ci.

Pourtant, d'un point de vue quantitatif tous ces paramètres d'ordre ne donnent pas les mêmes résultats. Dans certains cas la branche du diagramme des phases associée à la transition au chaos suit une loi de puissance. Les exposants que nous avons mesurés sont les suivants :

	$\nu=50 \text{ mm}^2/\text{s}$	$\nu=20 \text{ mm}^2/\text{s}$
$\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$	$0,22 \pm 0,05$	$\times$
$\langle 1 - f \rangle$	$0,10 \pm 0,05$	$0,37 \pm 0,05$
$\sigma_d$	$0,10 \pm 0,05$	$0,14 \pm 0,05$
$\langle (C_i + F_i)/N_i \rangle$	$0,56 \pm 0,05$	$\times$



Le cas de l'huile de viscosité  $\nu=20$  mm<sup>2</sup>/s est difficile à discuter, à cause de la présence des oscillations de lignes qui jouent le rôle de perturbations d'amplitudes finies au voisinage du seuil. Dans le cas de l'huile de viscosité  $\nu=50$  mm<sup>2</sup>/s, trois des exposants mesurés ont des valeurs très faibles, ce qui signe peut-être le fait que la transition est discontinue. Selon le paramètre d'ordre lié aux C/F, cette transition est cependant clairement continue. Il nous faut donc discuter de la pertinence de chacun des paramètres d'ordre que nous avons utilisés.

Les paramètres  $\langle 1 - f \rangle$  et  $\sigma_d$  ne sont en fait pas toujours nuls dans le cas où le système est dans l'état laminaire. En effet, lorsque les colonnes sont organisées sur un réseau hexagonal avec défauts topologiques ou en présence d'oscillations de lignes, toutes n'ont pas six plus proches voisines, et leurs distances avec ces ppv ne sont pas forcément égales à la longueur d'onde du réseau hexagonal. D'autre part, la mesure de  $f$  ne permet pas de tenir compte de la dynamique des colonnes périphériques. Cette dynamique joue pourtant un rôle essentiel au voisinage du seuil. Le paramètre  $\langle 1 - N/N_{lam} \rangle$  présente quant à lui un inconvénient majeur : sa définition nécessite l'introduction d'un paramètre,  $N_{lam}$ . Ce dernier n'est de plus pas toujours bien défini, en particulier si l'état laminaire contient des défauts topologiques.

Le meilleur des paramètres d'ordre que nous avons utilisés semble être  $\langle (C_i + F_i)/N_i \rangle$ , le taux moyen de créations/fusions. En effet, ce paramètre est toujours nul dans les zones laminaires, quelle que soit leur topologie, et sa définition ne nécessite l'introduction d'aucun paramètre. De plus, si ce taux moyen est constant dans les régions désordonnées, ce qui est vrai au moins près du seuil de la transition, alors  $\langle (C_i + F_i)/N_i \rangle$  mesure la fraction chaotique moyenne dans le système. On a donc accès à l'un des exposants de la percolation dirigée : l'exposant  $\beta$ , qui mesure la variation en loi de puissance de la fraction turbulente  $F_t$  lorsqu'on s'approche du seuil par valeurs supérieures. Cet exposant est en principe défini dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire pour un système de taille infinie, mais la mesure de l'exposant correspondant dans le cas d'un système fini en donne une indication raisonnable.

Nous avons donc mesuré dans notre système une valeur de  $\beta$  de l'ordre de  $0,56 \pm 0,05$ . En percolation dirigée à 2+1 dimensions, on a  $\beta \approx 0,58$  [53]. Notre mesure de  $\beta$  supporte donc la conjecture de Pomeau [71]. C'est la première fois qu'un exposant en accord avec celui de la DP est mesuré dans un système réel bidimensionnel [71].

## 9.5. Conclusion

Nous avons caractérisé dans ce chapitre les transitions du système au chaos spatio-temporel pour les huiles de viscosités typiques  $\nu=50$  mm<sup>2</sup>/s et  $\nu=20$  mm<sup>2</sup>/s, à l'aide de quatre paramètres différents. Le cas de l'huile de viscosité  $\nu=20$  mm<sup>2</sup>/s est difficile à étudier, car la présence d'oscillations de lignes au voisinage du seuil masque la nature de la transition. Dans le cas où  $\nu=50$  mm<sup>2</sup>/s, trois des paramètres

d'ordre semblent indiquer que la transition est discontinue. Selon le quatrième, qui semble le plus raisonnable, la transition est au contraire continue. Ce paramètre d'ordre nous a permis d'avoir accès à la fraction turbulente moyenne  $F_t$ , couramment mesurée dans les systèmes présentant un régime d'IST. L'évolution de  $F_t$  en fonction du paramètre de contrôle, sur la branche correspondant à l'IST, est continue. Elle suit une loi de puissance dont l'exposant est une approximation de  $\beta$ , la valeur correspondante dans la limite thermodynamique, l'un des exposants caractéristiques de la classe d'universalité de la percolation dirigée. Cet exposant est compatible avec celui de la DP. Il semble cependant impossible de conclure sur la nature, continue ou discontinue, de la transition au chaos spatio-temporel dans le système que nous avons étudié, à cause de la trop faible taille de celui-ci. Pour pouvoir caractériser cette transition, il est nécessaire d'étudier un système plus grand. Si elle s'avère continue, la mesure de  $\beta$  pour différentes tailles du système permettrait d'extrapoler sa valeur dans la limite des tailles infinies. Dans ce but, un dispositif expérimental de taille quatre fois plus grande (en surface) est en cours de montage.

Le système que nous avons étudié se distingue par le fait que, selon la valeur de la viscosité, la transition au chaos spatio-temporel peut se faire en augmentant ou en diminuant le débit d'alimentation. En fait, l'origine du désordre n'est pas la même dans les deux cas. À grande viscosité, lorsqu'on augmente le débit le film de liquide devient plus épais, les interactions entre colonnes sont de plus en plus importantes. Par contre, à faible viscosité, lorsque le débit est diminué le film devient de plus en plus mince, il devient de plus en plus difficile pour les colonnes d'occuper toute la surface. Ce cas est plus difficile à étudier, car au voisinage du seuil des oscillations de lignes apparaissent dans le système. Ces dernières jouent le rôle de perturbations d'amplitudes finies, et semblent masquer la continuité de la transition. Nous avons étudié la transition au chaos pour les huiles de haute et basse viscosité, mais il serait intéressant de faire la même étude au voisinage de la viscosité pour laquelle le comportement change :  $\nu \approx 35 \text{ mm}^2/\text{s}$ .

Un autre comportement marquant de la transition au chaos spatio-temporel est la présence de bistabilité au voisinage du seuil. Cette dernière semble due à la présence des bords. Nous étudions donc dans le chapitre suivant l'influence de la taille finie sur la transition au chaos par IST dans le cas général, afin de comprendre si la présence de bistabilité au voisinage du seuil est un phénomène générique ou pas.



## 10. Modélisation

Nous avons décrit dans le chapitre précédent la transition au chaos spatio-temporel pouvant apparaître dans un système hydrodynamique réel. Nous avons observé et décrit un comportement remarquable : l'existence d'un régime de bistabilité, près du seuil, entre l'IST et un régime quasi-laminaire où le désordre n'est présent que sur les bords. Ce comportement particulier semble dû à la présence de ces derniers, et donc à la taille finie du système.

Pour comprendre ce phénomène, on a adapté le modèle minimal d'IST introduit par H. Chaté et P. Manneville [10, 56] à la géométrie particulière du système expérimental. À notre connaissance ce modèle a toujours été étudié avec des conditions aux limites périodiques, pour s'affranchir des effets de bord. Nous avons choisi d'étudier les effets de taille finie.

Ce modèle, qu'on appellera par la suite MIST, et ses principaux comportements lorsqu'on l'applique à des systèmes aux limites périodiques, sont présentés dans la section 10.1. Dans la section 10.2 sont montrés les résultats que nous avons obtenus dans le cas de systèmes de tailles finies et variables. Les conclusions de ce chapitre sont rassemblées en 10.3.

### 10.1. Le modèle MIST

#### 10.1.1. Description du modèle

Le modèle MIST [10, 56, 57] est de type réseau d'itérations couplées : l'espace et le temps  $y$  sont discrets, tandis que le paramètre d'ordre est continu. Comme on l'a vu dans le chapitre 8, ce type de modèle constitue un intermédiaire entre les équations aux dérivées partielles, dont les comportements sont riches mais qui sont difficiles à étudier car elles sont très coûteuses en temps de calcul, et les automates cellulaires, aisément manipulables numériquement mais difficilement exploitables à cause du caractère discret de la variable locale. Le modèle MIST a été étudié à une et deux dimensions d'espace. On l'introduit ici dans le cas d'un système unidimensionnel mais cette description est facilement généralisable à des systèmes de dimensions plus élevées.

L'indice d'espace est noté  $i$ , celui de temps  $n$ , la valeur de la variable sur le site  $i$  au temps  $n$  est notée  $X_i^n$ . Chaque site n'est couplé qu'avec ses plus proches voisins,

ce type de couplage admettant une limite diffusive lorsque les pas d'espace et de temps tendent vers zéro (le couplage est appliqué simultanément à tous les sites). La variable sur le site  $i$  au temps  $n + 1$  s'exprime donc :

$$X_i^{n+1} = f(X_i^n) + \frac{\varepsilon}{2} [f(X_{i-1}^n) + f(X_{i+1}^n) - 2f(X_i^n)]$$

où  $\varepsilon$  mesure l'intensité du couplage.

### L'application locale $f$

La fonction  $f$  doit vérifier des conditions minimales pour modéliser l'IST. Ainsi il doit exister pour un site isolé un état asymptotique laminaire, régulier, mais aussi la possibilité d'un comportement chaotique transitoire. L'état laminaire doit être linéairement stable, c'est-à-dire stable vis à vis de perturbations infinitésimales, mais instable sous l'effet des perturbations localisées d'amplitudes finies introduites par le couplage. La fonction  $f$  proposée par H. Chaté et P. Manneville est linéaire par morceaux (voir figure 10.1) :

$$f(X) = \begin{cases} rX & \text{si } X \in [0; 1/2] \\ r(1 - X) & \text{si } X \in [1/2; 1] \\ k(X - X^*) + X^* & \text{si } X > 1 \end{cases}$$

où  $|k| \leq 1$ ,  $r > 2$  et en général  $X^* \equiv (r + 2)/4$ .

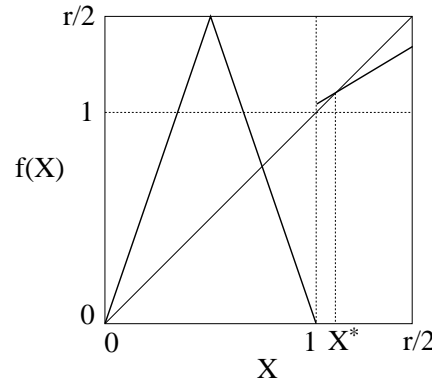


FIG. 10.1.: Application locale  $f$ .

On dit que le site  $i$  est dans l'état laminaire (resp. chaotique) au temps  $n$  si  $X_i^n > 1$  (resp.  $X_i^n \leq 1$ ).

L'application  $f$  contrôle entièrement la dynamique locale : dans le cas d'un couplage nul ( $\varepsilon=0$ ), chaque site évolue indépendamment sous l'effet de  $f$ . Cette application se compose de deux parties :

- Sur l'intervalle  $[0; 1]$  (état « chaotique »), la fonction « circonflexe » est caractérisée par le paramètre  $r$ .

Si  $r > 1$ , alors l'application est divergente : les images de deux points  $X_1$  et  $X_2$  après  $N$  itérations sont en valeur absolue séparées de  $e^{N \ln(r)} |X_1 - X_2|$  (tant que ces images restent dans l'intervalle  $[0; 1]$ ). À cause de la divergence locale des trajectoires, toutes les conditions initiales comprises dans  $[0; 1]$  convergent vers un attracteur chaotique.

Si  $r < 2$  alors il existe un intervalle inclus dans  $[0; 1]$  invariant par  $f$ . Une condition initiale appartenant à  $[0; 1]$  le restera indéfiniment.

Si  $r > 2$ , alors il n'existe plus de sous-intervalle inclus dans  $[0; 1]$  invariant par la dynamique  $f$ . Une condition initiale appartenant à  $[0; 1]$  arrivera dans  $]1; r/2]$  en un temps fini, la durée moyenne de ce transitoire diverge lorsque  $r$  tend vers 2 [54]. On comprend ainsi pourquoi  $r$  doit être supérieur à 2 pour modéliser l'IST : l'état chaotique doit être transitoire.

- Sur l'intervalle  $]1; r/2]$  (état « laminaire »), l'application est caractérisée par le paramètre  $k$ .

Si  $k = 1$  alors toute condition initiale appartenant à  $]1; r/2]$  est bloquée dans un état marginalement stable.

Si  $k \in [-1; 1[$  toute condition initiale dans  $]1; r/2]$  converge vers la valeur  $X^*$ .

Si  $|k| > 1$  la variable locale diverge exponentiellement vite : ce cas est exclu pour modéliser l'IST.

## Le rôle du couplage

Dans le cas d'un couplage  $\varepsilon$  nul, tous les sites évoluent de façon indépendante les uns des autres. Comme la dynamique locale ne peut être que transitoirement chaotique, le système se trouve après un nombre fini d'itérations dans un état stationnaire où tous les sites sont laminaires.

Par contre, pour des valeurs non nulles de  $\varepsilon$  le couplage agit comme une perturbation d'amplitude finie : si  $\varepsilon$  est suffisamment grand, l'état chaotique peut se propager à travers le couplage aux plus proches voisins.

Ceci arrive lorsque  $\varepsilon$  est supérieur à une valeur critique  $\varepsilon_c$ . Dans ce cas on peut observer, en partant de conditions initiales où un nombre suffisant de sites est dans l'état désordonné, des régimes d'intermittence spatio-temporelle. Le paramètre d'ordre est la fraction moyenne de sites chaotiques  $F_t$ , couramment appelée fraction turbulente, ou fraction chaotique, bien définie car les régimes sont statistiquement stationnaires. Le paramètre de contrôle est le couplage  $\varepsilon$ , dont la valeur critique  $\varepsilon_c$  est également bien définie dans la limite thermodynamique (limite de « taille infinie »).

### 10.1.2. Résultats avec conditions aux limites périodiques

Le modèle MIST dépend des trois paramètres :

- $r$ , qui mesure la durée de vie d'un site chaotique en l'absence de couplage
- $k$ , qui caractérise le nombre de points fixes stables dans l'état laminaire (un seul ou une infinité) et la vitesse de convergence vers celui-ci s'il est unique
- $\varepsilon$ , le couplage entre sites voisins, choisi comme paramètre de contrôle

Quels que soient  $r$  et  $k$  tels que  $r > 2$  et  $|k| \leq 1$ , on observe bien la propagation par contamination de régions chaotiques dans un bain laminaire à partir d'une valeur seuil de  $\varepsilon$ , la fraction de sites dans l'état désordonné augmentant avec l'écart au seuil. Différents comportements peuvent pourtant apparaître selon les valeurs de  $r$  et  $k$ . L'influence de ces paramètres sur la transition a été étudiée, à une et deux dimensions d'espace dans le cas de systèmes avec conditions aux limites périodiques, dans [10, 56, 57].

#### 10.1.2.1. Rôle de $r$

Les structures apparaissant dans un diagramme spatio-temporel sont plus fines pour les plus petites valeurs de  $r$ . En effet, quand  $r \rightarrow 2$  la probabilité qu'un site chaotique devienne laminaire tend vers zéro : le temps caractéristique des transitoires chaotiques diverge. Les régions laminaires vivent donc plus longtemps pour les grandes valeurs de  $r$ , les processus sont plus « certains », et les motifs plus réguliers dans ce cas [10]. Ce raisonnement permet également de comprendre pourquoi  $\varepsilon_c$  est plus grand pour des valeurs croissantes de  $r$ .

#### 10.1.2.2. Rôle de $k$

La valeur de  $k$  influence plus fortement la nature de la transition.

**$k=1$**  Dans ce cas, les systèmes à une et deux dimensions ont un comportement similaire : la transition est toujours continue [10, 56], il est possible de mesurer les exposants introduits au chapitre 8. Leurs valeurs ne sont en général pas en accord avec celles des exposants de la DP, et varient avec  $r$ .

**$k < 1$  et système à une dimension d'espace** Pour  $k < 0,7$  la région de transition est masquée par la présence de structures propagatives de type soliton ou d'objets pulsants non propagatifs : l'état asymptotique peut être un nombre arbitraire de tels défauts ou un état laminaire pur. En partant de grandes valeurs de  $\varepsilon$  et en le diminuant, on peut tomber sur de telles structures, mais si ce changement n'arrive

pas trop vite et qu'on peut cumuler suffisamment de statistiques la transition semble continue [57].

Pour  $0,7 < k < 1$  ces défauts ne sont plus linéairement stables près du seuil. La fraction de sites chaotiques présente alors une faible discontinuité au seuil, mais celle-ci diminue quand  $k$  augmente, s'annulant pour  $k=1$ . Pourtant, bien que la transition semble discontinue pour  $0,7 < k < 1$ , la distribution des tailles des régions laminaires au seuil montre une région de scaling, caractéristique des transitions continues. On est donc dans ce cas dans une situation hybride [51].

**$k < 1$  et système à deux dimensions d'espace** Dans ce cas la transition présente toutes les caractéristiques d'une transition discontinue, que les défauts soient linéairement stables dans la région de transition ou pas [56, 57].

$\varepsilon_c$ , la valeur du couplage au seuil, peut être définie comme la valeur en-dessous de laquelle le système tombe immédiatement dans l'état asymptotique (entièrement laminaire ou éventuellement avec défauts si ces derniers sont linéairement stables dans la région de transition) quelle que soit la condition initiale qu'on lui impose. Cependant, il existe pour tout  $k < 1$  une valeur du couplage  $\varepsilon_s > \varepsilon_c$  telle que si  $\varepsilon \in ]\varepsilon_c; \varepsilon_s[$ , les fluctuations intrinsèques du système peuvent être suffisamment intenses pour le conduire à une fraction turbulente instantanée assez faible, après laquelle il tombe dans un état au repos. Cette remarque aura son importance par la suite.

## 10.2. Application au système expérimental

### 10.2.1. Méthode employée

Pour adapter le modèle MIST au système expérimental étudié au chapitre précédent, nous avons considéré un réseau bidimensionnel avec bords circulaires. Nous avons choisi un réseau triangulaire, par analogie avec la disposition des colonnes de liquide dans l'état laminaire, mais surtout parce cette géométrie permet de restaurer plus facilement la circularité des bords. Il reste à définir la condition de bord.

On a vu au chapitre 9 que dans le système expérimental les colonnes en périphérie présentaient une dynamique forte et découplée de celle du reste du système au-dessus du seuil et près de celui-ci (voir Fig. 9.3(c)), à cause du conflit entre la structure hexagonale du réseau et la circularité des bords. Nous avons donc dans un premier temps choisi de plonger le système dans un environnement stationnaire et homogène où tous les sites sont dans l'état chaotique. Les résultats du modèle avec cette condition de bord sont présentés en 10.2.2.1. On verra que le comportement du système numérique ainsi obtenu pose des problèmes d'interprétation et présente de trop nombreuses différences avec celui du système expérimental. Nous avons donc par



la suite, sur une idée d'Hugues Chaté, imposé une dynamique d'IST à une dimension sur la périphérie du système, plus proche de ce qui est observé expérimentalement. Les résultats du modèle avec cette condition aux limites sont montrés en 10.2.2.2. On discute ces résultats en 10.2.3.

## 10.2.2. Résultats

Le système considéré est dans tous les cas un cercle de rayon  $R$ . Les paramètres du modèle sont alors  $R$ , et  $r$  et  $k$  qui définissent le mapping.  $\varepsilon$ , le couplage entre sites voisins, est le paramètre de contrôle. On considérera toujours le cas  $r=3$ . Le comportement du système numérique est étudié pour trois valeurs de  $R$ ,  $R=7, 15$  et  $25$ , et deux valeurs de  $k$ ,  $k=1$  et  $0,5$ .

Pour chaque valeur de  $(R, r, k, \varepsilon)$ , on part d'une condition initiale telle que la valeur de la variable en chaque site intérieur au système est tirée aléatoirement, avec une probabilité  $1/2$  d'être égale à  $X^* = (r + 2)/4$  (unique point fixe stable de l'état laminaire si  $k < 1$ , état laminaire marginalement stable si  $k=1$ ) et une probabilité  $1/2$  d'avoir une valeur aléatoire entre 0 et 1 (état chaotique). On laisse à chaque fois le système évoluer sur suffisamment de pas de temps pour que la mémoire de ces conditions initiales soit perdue, puis les statistiques sont calculées sur  $5 \cdot 10^5$  pas de temps (nous avons vérifié que ce nombre était suffisant).

### 10.2.2.1. Conditions aux bords chaotiques

Nous avons d'abord imposé la condition aux limites telle que tous les sites externes au système sont dans l'état chaotique, la variable en ces sites étant fixée à la valeur 0. On parlera par la suite de conditions aux bords chaotiques.

Pour toutes les valeurs de  $R$  et  $k$  considérées, l'état chaotique parvient dans ce cas à pénétrer dans le système sur une couche assez large, dont l'épaisseur est en général de l'ordre de 3 ou 4 sites quel que soit le rayon  $R$ , même pour de faibles valeurs de  $\varepsilon$  (voir Fig. 10.2). Ce comportement n'est pas en accord avec celui du système expérimental, où seule la rangée périphérique de colonnes de liquide présente une dynamique forte et décorrélée. Par contre, un sous-système de rayon  $R-3$  semble présenter les bonnes caractéristiques pour modéliser la dynamique de l'expérience. Par la suite, lorsqu'on parlera de système de taille  $R$  dans le cas de conditions aux bords chaotiques, on travaillera en fait avec un système de rayon  $R+3$ , et on ne mesurera les statistiques que sur les sites appartenant à un disque de rayon  $R$  et de même centre.

Les résultats obtenus avec cette condition sont les suivants :

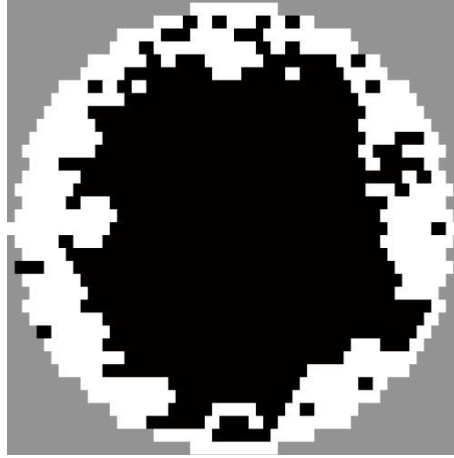


FIG. 10.2.: *État typique du système pour une faible valeur de  $\varepsilon$  (ici  $R=18$ ). Les sites laminaires sont noirs et les sites chaotiques blancs. Pour une visualisation plus claire on a représenté les sites extérieurs au système en gris, même s'il faut garder à l'esprit qu'ils sont tous dans l'état chaotique. Bien que le couplage soit faible, le désordre pénètre dans le système sur une épaisseur d'environ 3 ou 4 sites.*

$k=1$  Dans ce cas, on n'observe jamais de bistabilité, quelle que soit la valeur de  $R$ . La transition est bien continue, mais présente des effets de taille finie dont une conséquence est de rendre continue la dérivée du paramètre d'ordre près du seuil.

$k=0,5$  Les diagrammes des phases obtenus à différentes tailles pour  $k=0,5$  sont représentés sur la figure 10.3. Pour  $R=7$ , il existe un intervalle de valeurs de  $\varepsilon$ , juste au-dessus du seuil, pour lesquelles le système est bistable : comme dans l'expérience, ce dernier est tantôt dans un état d'IST, tantôt dans un état où le désordre n'est présent que sur les bords (état quasi-laminaire), et saute de temps en temps d'un état à l'autre. La figure 10.4 montre des distributions de fraction turbulente instantanée  $f_t$  (à ne pas confondre avec  $F_t$ , la fraction moyenne) pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon$  dans le régime de bistabilité : ces distributions sont clairement bimodales. Pour des valeurs croissantes de  $\varepsilon$  le pic correspondant aux faibles valeurs de  $f_t$  (régime quasi-laminaire) se dépeuple au profit de celui associé aux grandes valeurs de  $f_t$  (IST), jusqu'à disparaître complètement : on entre alors dans le régime d'IST pure.

Lorsque la taille du système augmente, l'intervalle de valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles il y a bistabilité est de plus en plus étroit (voir Fig. 10.3). La largeur de cet intervalle est égale à  $(40 \pm 5) \cdot 10^{-4}$  pour  $R=7$  et à  $(10 \pm 5) \cdot 10^{-4}$  pour  $R=15$ . Pour  $R=25$  elle est inférieure à  $8 \cdot 10^{-4}$ .

Dans le régime quasi-laminaire, la fraction chaotique moyenne  $F_t$  augmente avec  $\varepsilon$  (branche du bas du diagramme des phases), contrairement à ce qui est observé

expérimentalement, où cette fraction varie très peu avec le paramètre de contrôle (Fig. 9.7(a)). La branche supérieure du diagramme 10.3, associée au régime d'IST, montre que la transition est discontinue, ce qui était prévisible puisque  $k=0,5$  (voir 10.1.2).

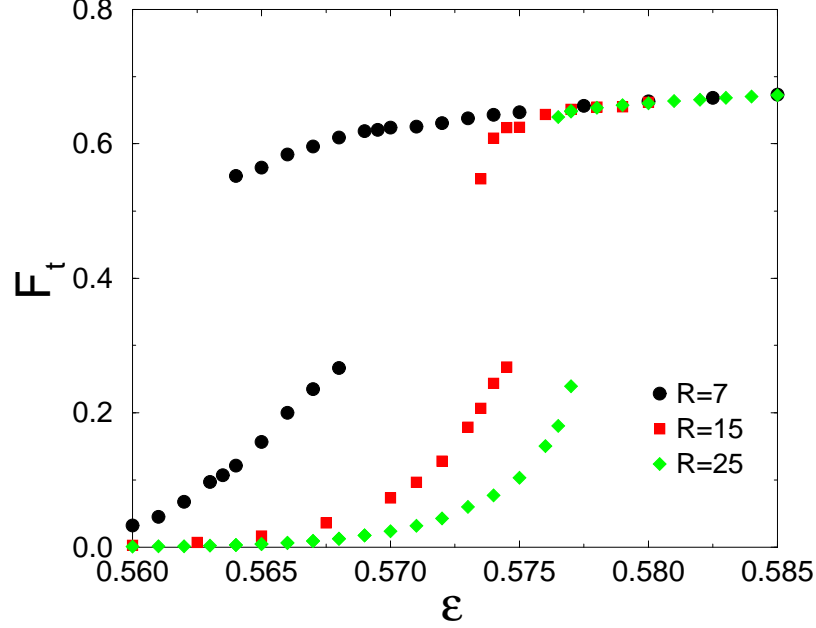


FIG. 10.3.: *Diagramme des phases du système avec conditions aux limites chaotiques ( $r=3$ ,  $k=0,5$ ).*

**Discussion sur les conditions aux limites chaotiques** Nous avons mis en évidence la présence de bistabilité au voisinage du seuil de la transition dans le cas où  $k=0,5$ . Mais les diagrammes des phases montrés sur la figure 10.3 présentent une différence majeure avec ceux obtenus expérimentalement (voir par exemple Fig. 9.7(a)) : le paramètre d'ordre  $F_t$  est ici non nul pour des valeurs de  $\varepsilon$  inférieures à celles pour lesquelles il y a bistabilité. Ce problème vient du fait que le désordre permanent des sites extérieurs peut pénétrer profondément dans le système même pour des valeurs très faibles de  $\varepsilon$ . Pour éviter cet inconvénient on pourrait mesurer les statistiques sur un sous-système encore plus petit que le disque de rayon  $R-3$ , mais l'épaisseur de la couche sur laquelle on ne compte pas les statistiques doit être choisie empiriquement. On va voir par la suite qu'il est possible de choisir des conditions aux limites plus judicieuses.

**Remarque dans le cas de conditions initiales homogènes** Avant de passer à l'étude d'autres conditions de bords, on peut signaler un comportement remarquable

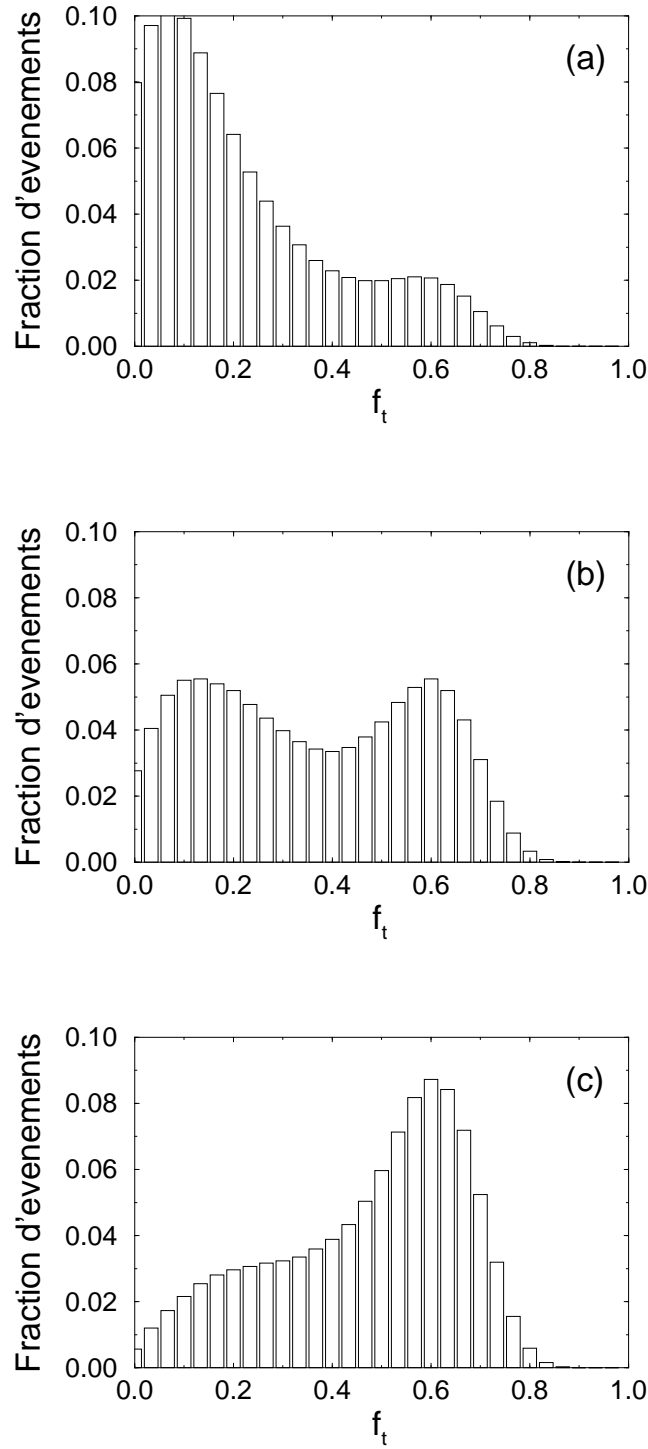


FIG. 10.4.: *Distribution de la fraction turbulente instantanée  $f_t$  avec conditions aux limites chaotiques pour  $R=7$ ,  $r=3$ ,  $k=0,5$  et (a)  $\varepsilon=0,565$ , (b)  $\varepsilon=0,566$ , (c)  $\varepsilon=0,567$ . Pour des valeurs croissantes de  $\varepsilon$  le pic correspondant aux faibles valeurs de  $f_t$  (régime quasi-laminaire) se dépeuple au profit de celui associé aux grandes valeurs de  $f_t$  (IST).*

du système avec condition aux bords chaotique, dans le cas où l'on impose une condition initiale où la variable en tous les sites intérieurs au système est égale à  $X^*$  (état laminaire homogène). Rappelons qu'à l'instant initial les variables sur les sites extérieurs ont la valeur 0. Dans ce cas particulier le système vérifie donc les symétries du réseau triangulaire. Ni le mapping  $f$  ni le couplage ne peuvent briser ces dernières. Le système conservera donc indéfiniment les symétries du réseau. On obtient à chaque pas de temps des figures du type de celles montrées sur les Fig. 10.5(a-d).

On peut de la même manière briser certaines symétries à l'instant initial, les autres seront toujours vérifiées indéfiniment (à la précision de la machine près!) par le système. Par exemple en choisissant comme état initial le même que décrit précédemment mais où deux sites intérieurs alignés sur un axe du réseau ont la valeur 0, la seule symétrie restante est la parité par rapport à cet axe. On montre deux exemples de configurations du système dans ce cas sur les figures 10.5(e) et (f).

#### 10.2.2.2. Intermittence unidimensionnelle sur les bords

La figure 9.3(c), qui illustre le régime quasi-laminaire observé dans l'expérience, suggère en fait que la dynamique des bords est de type IST à une dimension : on distingue nettement la présence de domaines laminaires et d'autres désordonnés. Nous avons donc dans un second temps imposé au système numérique la condition aux limites suivante : la dynamique des sites de la rangée périphérique est modélisée par le modèle MIST. Ces sites ne sont couplés qu'entre eux, ils suivront donc le comportement du modèle MIST à une dimension d'espace (1D) avec conditions aux limites périodiques. La dynamique des autres sites est toujours modélisée par le modèle MIST, à deux dimensions d'espace (2D).

Le modèle dépend alors de trois paramètres supplémentaires. On doit maintenant fixer les paramètres du MIST à 1D,  $r_b$ ,  $k_b$  et  $\varepsilon_b$ , ceux du MIST à 2D,  $r_c$ ,  $k_c$  et  $\varepsilon_c$ , et le rayon du système  $R$ . On imposera toujours  $r_b=r_c=3$ . Comme pour les conditions aux limites chaotiques,  $R$  prendra les valeurs 7, 15 et 25. On étudiera les cas  $k_b=1$  et 0,5, et  $k_c=1$  et 0,5. On choisira comme paramètre d'ordre  $\varepsilon_c$ , le couplage des sites internes. Enfin, pour que le comportement du système soit comparable à celui de l'expérience, on doit faire varier  $\varepsilon_b$  de façon à ce que :

- lorsque  $\varepsilon_c$  est à sa valeur critique<sup>1</sup>,  $\varepsilon_b$  le soit aussi
- lorsque  $\varepsilon_c$  augmente,  $\varepsilon_b$  augmente aussi

La façon la plus simple de tenir compte de ces deux conditions est d'imposer une relation linéaire entre les deux quantités, de la forme :

$$\varepsilon_b = \alpha(\varepsilon_c - \varepsilon_c^c) + \varepsilon_b^c$$

---

<sup>1</sup>On parle de valeur critique mais il faut garder à l'esprit que le système est de taille finie.

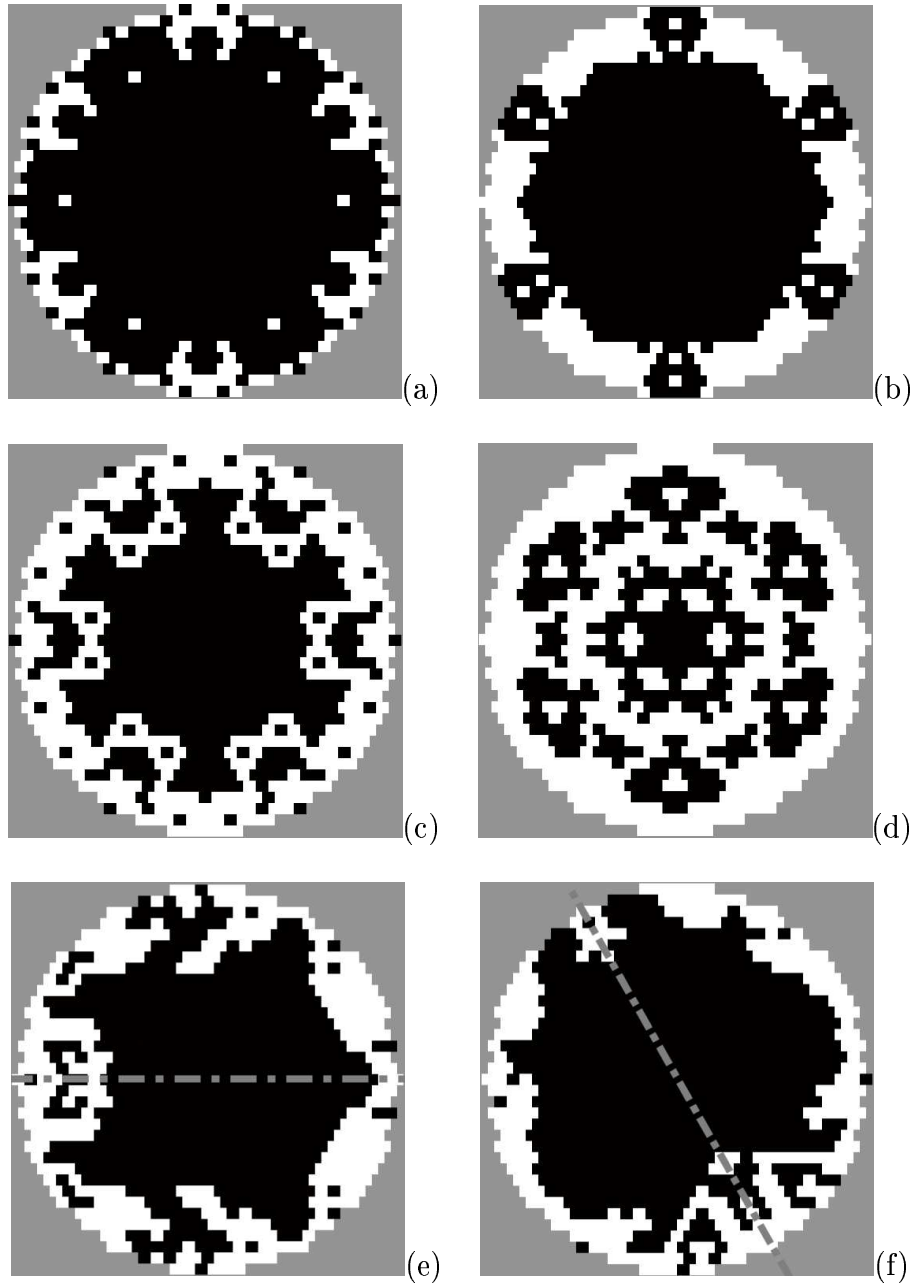


FIG. 10.5.: Quelques configurations instantanées du système avec conditions aux bords chaotiques.

(a-d) Avec une condition initiale uniforme (tous les sites ont la valeur  $X^*$ ), le système vérifie indéfiniment toutes les symétries du réseau.

(e) et (f) Avec condition initiale uniforme, sauf deux sites se trouvant le long d'un des axes de symétrie du réseau (trait gris), auxquels on impose la valeur 0 à l'instant initial, toutes les autres symétries sont brisées mais le système reste invariant par rapport à l'axe en question. Les conventions de couleur des sites sont les mêmes que sur la figure 10.2.

où  $\varepsilon_c^c$  et  $\varepsilon_b^c$  sont respectivement les valeurs aux seuils de  $\varepsilon_c$  et  $\varepsilon_b$ , et  $\alpha$  est un paramètre. Par la suite on considèrera toujours le cas  $\alpha=10$ , mais nous avons vérifié que les solutions ne dépendaient pas qualitativement de la valeur de  $\alpha$ .

Nous avons obtenu les résultats suivants :

**$k_c=1$**  Quelles que soient les valeurs de  $R$  et  $k_b$ , nous n'avons jamais observé de bistabilité.

**$k_c=0,5$  et  $k_b=0,5$**  Dans ce cas on observe bien un régime de bistabilité près du seuil de la transition : le système est parfois dans un régime quasi-laminaire, très proche de ce qui est observé expérimentalement (Fig. 10.6(a)), parfois dans un régime d'IST (Fig. 10.6(b)). Comme dans le cas des conditions aux bords chaotiques et dans le système expérimental, le système passe de plus en plus de temps dans ce dernier état quand  $\varepsilon_c$  augmente, jusqu'à ce que la bistabilité disparaisse et que l'IST soit permanente. La figure 10.7 montre les diagrammes des phases du système avec IST sur les bords pour  $k_c=k_b=0,5$ . Pour chaque valeur de  $R$ , la largeur de l'intervalle de valeurs de  $\varepsilon_c$  pour lesquelles il y a bistabilité est la même qu'avec les conditions aux limites chaotiques.

On peut cependant noter deux différences remarquables entre les diagrammes des phases 10.3 et 10.7. La plus marquante est le fait que, avec l'IST sur les bords, la fraction turbulente moyenne est nulle pour les valeurs  $\varepsilon_c$  inférieures à celles pour lesquelles il y a bistabilité (nous avons construit le modèle pour cela), sauf très près du seuil (ce qui était aussi vérifié expérimentalement, voir Fig. 9.7(a)). D'autre part, dans ce cas  $F_t$  varie beaucoup moins avec  $\varepsilon$  dans le régime quasi-laminaire (voir Fig. 10.7,  $R=7$ ) : ce comportement est plus proche de celui du système expérimental (Fig. 9.7(a)).

Dans le cas des conditions aux limites avec IST (et  $k_b=0,5$ ), on remarque aussi que la différence entre  $F_t$  dans le régime quasi-laminaire et  $F_t$  dans le régime d'IST pour une valeur fixée de  $\varepsilon_c$  est de plus en plus faible quand  $R$  augmente.

On a également représenté sur la figure 10.8 des distributions de fraction chaotique  $f_t$  instantanée en présence de bistabilité lorsque le système passe environ autant de temps dans les deux régimes, pour deux valeurs de  $R$ . Pour la plus grande taille les deux pics sont beaucoup plus étroits : dans chacun des deux états, la fraction chaotique instantanée varie donc beaucoup moins.

**$k_c=0,5$  et  $k_b=1$**  Lorsque  $k_b=1$  le système présente globalement un comportement très similaire à ce qui est observé quand  $k_b=0,5$ . Les diagrammes des phases résultants sont montrés sur la figure 10.9. Pour toutes les valeurs de  $R$  étudiées, les diagrammes des phases dans les deux cas sont qualitativement similaires, les largeurs des intervalles de valeurs de  $\varepsilon_c$  pour lesquelles il y a bistabilité sont toujours

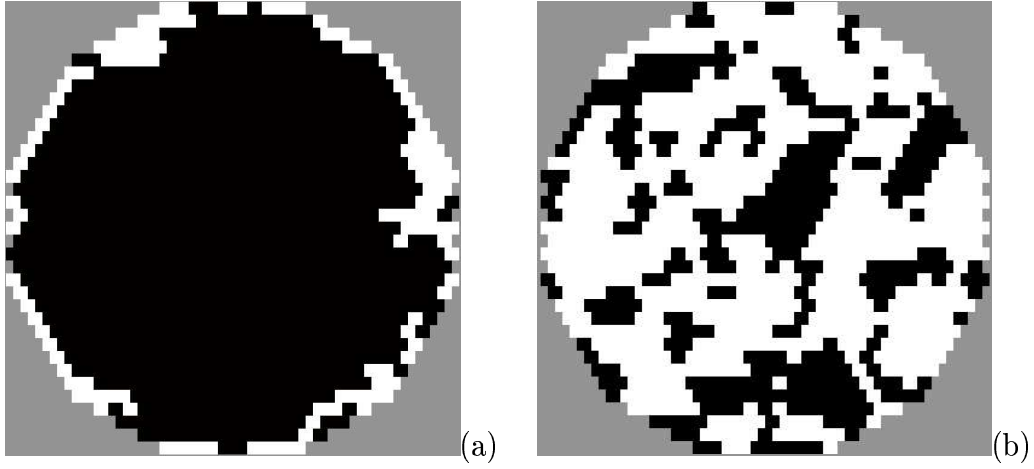


FIG. 10.6.: Configurations instantanées du système dans le régime de bistabilité. Le système saute sans arrêt entre (a) des états quasi-laminaires, où le désordre n'est présent qu'en périphérie et (b) des régimes d'IST. On distingue en (a) une incursion du désordre vers le cœur du système, comme dans l'expérience (voir Fig. 9.3(c)). Les conventions de couleurs sont les mêmes que sur la figure 10.2.

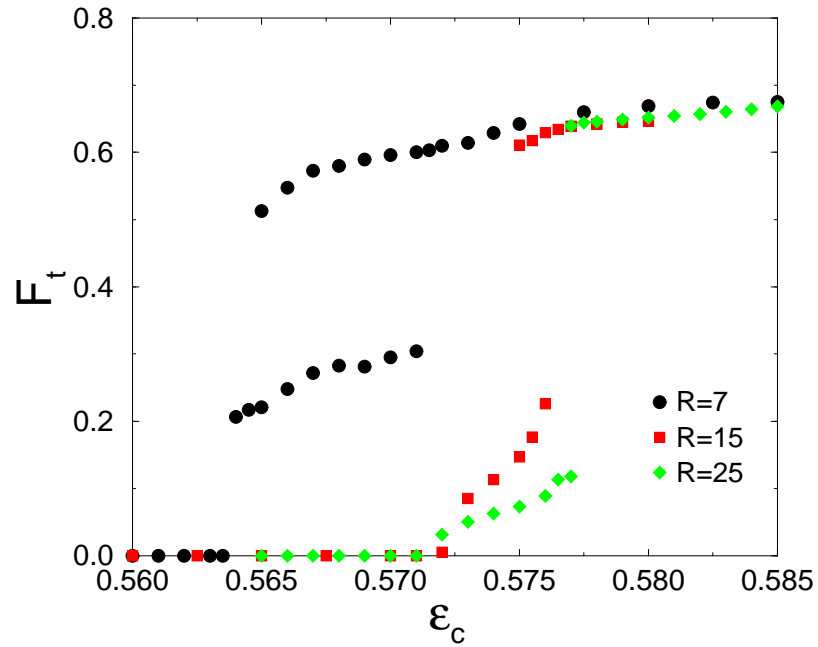


FIG. 10.7.: Diagramme des phases du système avec IST à 1D sur les bords :  $r_c=3$ ,  $k_c=0,5$ ,  $r_b=3$ ,  $k_b=0,5$  et  $\alpha=10$ .



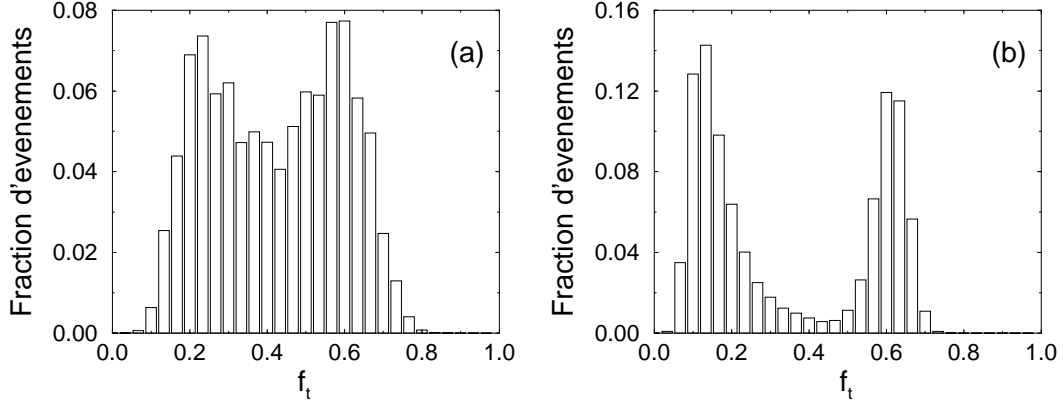


FIG. 10.8.: *Distribution de la fraction turbulente instantanée  $f_t$  avec IST à 1D sur les bords pour  $r_c=3$ ,  $k_c=0,5$ ,  $r_b=3$ ,  $k_b=0,5$ , (a)  $R=7$ ,  $\varepsilon_c=0,567$ ,  $\varepsilon_b=0,46$  et (b)  $R=15$ ,  $\varepsilon_c=0,5755$ ,  $\varepsilon_b=0,445$ .*

les mêmes (aux barres d'erreurs près). La seule différence notable concerne la branche correspondant aux faibles valeurs de  $F_t$ , associée au régime quasi-laminaire : dans ce régime  $F_t$  varie plus fortement avec  $\varepsilon_c$ , comme dans le cas des conditions aux bords chaotiques.

### 10.2.3. Résumé - Discussion

Nous avons étudié le comportement du système avec trois types de conditions aux limites, trois tailles différentes, et deux valeurs du paramètre  $k$  régissant la dynamique des sites internes (appelé  $k_c$  dans certains cas). Les principaux résultats que nous avons obtenus sont les suivants :

1. La bistabilité, jamais observée lorsque  $k=1$ , peut se produire lorsque  $k=0,5$  au voisinage du seuil.
2. La largeur de l'intervalle de valeurs du paramètre de contrôle pour lesquelles il y a bistabilité diminue fortement quand la taille du système augmente. Cette largeur ne dépend cependant pas du type de conditions aux bords choisies.
3. Pour toutes les conditions aux limites étudiées, les diagrammes des phases sont qualitativement les mêmes, mis à part la branche associée au régime quasi-laminaire. En effet, la fraction turbulente moyenne dans cet état varie beaucoup moins avec le paramètre de contrôle dans le cas des conditions aux bords avec IST et  $k_b=0,5$  que dans les deux autres cas.

On interprète maintenant ces résultats, point par point :

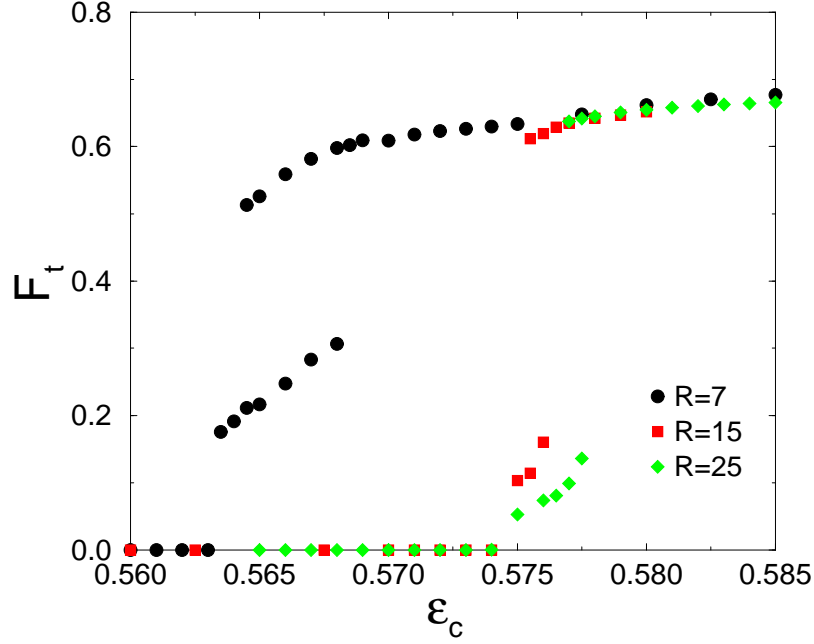


FIG. 10.9.: *Diagramme des phases du système avec IST à 1D sur les bords :  $r_c=3$ ,  $k_c=0,5$ ,  $r_b=3$ ,  $k_b=1$  et  $\alpha=10$ .*

1. On a vu en 10.1.2 que, dans le cas d'un système bidimensionnel avec conditions aux limites périodiques, il existait pour tout  $k < 1$  une valeur du couplage  $\varepsilon_s > \varepsilon_c$  telle que si  $\varepsilon \in ]\varepsilon_c; \varepsilon_s[$  alors les fluctuations intrinsèques du système peuvent être suffisamment intenses pour le conduire à une fraction turbulente instantanée assez faible, après laquelle il tombe dans un état au repos, et y reste indéfiniment. Ici c'est le même phénomène qui se produit mais, une fois que le système est au repos, le désordre entretenu sur les bords peut se propager vers l'intérieur et permettre ainsi au système de retrouver une fraction turbulente instantanée suffisamment grande pour qu'il se retrouve dans le régime d'IST et que celui-ci persiste pendant un certain temps. Puis il arrive un moment où  $f_t$  redevient trop faible, le système retombe dans un état calme, et ainsi de suite. On comprend ainsi pourquoi la bistabilité arrive pour  $k=0,5$  et pas pour  $k=1$  (dans ce cas l'IST est toujours persistante au-dessus du seuil), et pourquoi elle n'apparaît que juste au-dessus du seuil de la transition. Pour confirmer cette interprétation on peut signaler que, même avec des conditions aux bords avec IST, il arrive que le cœur du système ne sorte jamais de l'état de repos, si on est très près du seuil. Mais cette situation est exceptionnelle. Dans la situation avec conditions aux bords chaotiques, on ne l'a jamais observée : le désordre sur les bords est suffisant pour toujours permettre au système de remonter dans l'état d'IST.

2. Pour qu'il y ait bistabilité, le désordre sur les bords doit donc pouvoir pénétrer assez profondément dans le système pour que ce dernier retrouve une fraction turbulente instantanée suffisamment élevée. La valeur de  $f_t$  minimale pour que le système remonte dans l'état d'IST diminue quand  $\varepsilon$  augmente [56]. La bistabilité a donc lieu sur un intervalle de valeurs du paramètre de contrôle  $[\varepsilon_b; \varepsilon_s[$  ( $\varepsilon_b > \varepsilon_c$ ). Or, plus le système est petit, plus les incursions du désordre périphérique sont susceptibles d'augmenter la fraction chaotique instantanée  $f_t$ . On comprend donc pourquoi la bistabilité apparaît pour beaucoup plus de valeurs du paramètre de contrôle lorsque  $R$  diminue.
3. Dans le régime quasi-laminaire, la fraction chaotique dépend essentiellement de la dynamique des bords. On comprend donc pourquoi la dépendance de  $F_t$  en fonction de  $\varepsilon$  dans ce régime est différente lorsque  $k_b=1$  et  $k_b=0,5$  : pour  $k_b=1$  la transition sur les bords est continue, elle est discontinue si  $k_b=0,5$ .

## 10.3. Conclusion

Nous avons étudié le comportement du modèle MIST dans le cas d'un système de taille finie avec trois types de conditions aux limites conférant aux bords une dynamique forte et découplée de celle de l'intérieur, trois tailles différentes, et deux valeurs du paramètre  $k$  régissant la dynamique des sites internes. Pour  $k=1$ , la transition est bien continue, il n'y a jamais bistabilité. Pour  $k=0,5$ , la transition est discontinue, il y a bistabilité juste au-dessus du seuil. Quand la taille du système augmente, celle-ci a lieu sur un intervalle de valeurs du paramètre de contrôle de plus en plus étroit, car le désordre entretenu sur les bords a de plus en plus de mal à pénétrer dans le système.

Il serait intéressant de poursuivre l'étude avec des valeurs du rayon encore plus grandes. On peut s'attendre à ce qu'à partir d'une certaine taille la bistabilité n'existe plus. Concernant le système expérimental de taille plus grande en cours d'élaboration, on devrait également observer la bistabilité sur une plage de débit plus étroite, voire sa disparition complète.

## 11. Conclusion

Nous avons dans un premier temps étudié la transition au chaos par intermittence spatio-temporelle dans un système bidimensionnel réel, où un film de liquide horizontal continuellement alimenté se déstabilise sous l'effet de la gravité. Cette transition a lieu dans le régime de colonnes de liquide. Les fluides utilisés sont des huiles silicone, dont il est possible de changer la viscosité en maintenant constantes la masse volumique et la tension de surface. On a choisi comme paramètre de contrôle le débit d'alimentation. Pour les huiles de hautes viscosités, la transition se fait en augmentant le débit, elle est hystérétique à cause de la stabilité linéaire de l'état laminaire. Pour les huiles de basses viscosités, la transition se fait en diminuant le débit. La présence d'oscillations de lignes de colonnes, qui jouent le rôle de perturbations d'amplitude finie, dans la région de transition semble masquer la nature, continue ou discontinue, de cette transition. Ces oscillations font également disparaître l'hystérésis. Dans tous les cas, le système est bistable juste au-dessus du seuil de la transition : il est tantôt dans un régime d'IST, tantôt dans un régime quasi-laminaire, où le désordre est essentiellement présent sur les bords.

À cause de la nature discrète des objets et de la présence possible d'oscillations de lignes et de défauts topologiques dans les régions laminaires, il est difficile de détecter automatiquement ces domaines. Nous avons cependant utilisé quatre traceurs différents qui permettent de quantifier le désordre dans le système. Trois d'entre eux semblent indiquer que, pour les huiles de grandes viscosités, la transition est discontinue, tandis que selon le quatrième cette transition est continue. Ce paramètre, relié au taux de créations/fusions de colonnes, nous a permis d'avoir accès à la fraction turbulente moyenne, et donc à la mesure de l'exposant  $\beta$ . Cet exposant, mesuré pour une huile de haute viscosité, est en accord avec celui de la DP : c'est la première fois qu'un exposant supportant la conjecture de Pomeau est mesuré dans un système réel bidimensionnel.

Cependant il serait important, pour pouvoir conclure quant à la nature continue ou discontinue de la transition, et le cas échéant conforter la valeur de  $\beta$ , de faire la même mesure avec un système de plus grande taille. Un dispositif expérimental de surface quatre fois plus importante est en cours de montage. Il semble également intéressant d'étudier le comportement du système pour des viscosités proches de celle pour laquelle la nature de la transition change ( $\nu \approx 35 \text{ mm}^2/\text{s}$ ).

Nous avons été intrigués par le régime de bistabilité toujours présent juste au-dessus du seuil et apparemment dû à la présence des bords, dont la dynamique est forte et

---

décorrélée de celle du reste du système. Afin de comprendre si ce phénomène était générique ou pas dans le cas de systèmes bidimensionnels de taille finie transitant au chaos par IST, nous avons dans un second temps appliqué un modèle minimal d'intermittence spatio-temporelle, habituellement étudié dans le cas de conditions aux limites périodiques, à un système de taille finie. Nous avons utilisé trois conditions aux limites différentes, toutes telles que la dynamique des bords soit forte et décorrélée de celle de l'intérieur du système. Le modèle MIST appliqué à un système bidimensionnel peut présenter une transition au chaos continue ou discontinue, selon la valeur de l'un des paramètres dont il dépend. On a observé un régime de bistabilité juste au-dessus du seuil pour toutes les conditions de bord considérées dans le cas où cette transition est discontinue, mais jamais dans le cas contraire. Selon ce modèle minimal, la transition du système expérimental serait donc plutôt discontinue. Mais seul un dispositif expérimental de plus grande taille permettrait de conclure définitivement à ce sujet.

Pour une taille croissante du système numérique, l'intervalle de valeurs du paramètre de contrôle pour lesquelles il y a bistabilité devient de plus en plus étroit. En effet, pour que cette bistabilité soit présente il faut que le désordre émanant des bords puisse pénétrer suffisamment profondément dans le système, ce qui est de plus en plus improbable lorsque la taille du système augmente. On peut donc supposer que la bistabilité sera plus difficile à observer dans le système expérimental de taille plus grande. Sur le plan numérique, il serait intéressant de faire la même étude avec des systèmes de rayons plus importants. Il est probable qu'à partir d'une certaine taille la bistabilité n'existera plus.

# Troisième partie .

## Annexes



# A. Les invariants $Q$ et $R$ et la dynamique d'Euler Restreinte

## A.1. Les invariants $Q$ et $R$

Les valeurs propres du tenseur de gradient de vitesse  $A$  caractérisent la topologie locale de l'écoulement [83]. Si elles sont toutes réelles, alors l'écoulement est localement hyperbolique, et les lignes de courant (et les trajectoires lagrangiennes) sont dominées par des étirements et des contractions. Si deux d'entre elles sont complexes conjuguées, alors l'écoulement est elliptique, les lignes de courant (et les trajectoires lagrangiennes) sont localement tourbillonnantes.

Ces valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dépendent a priori de trois variables, car elles sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$\begin{aligned} P &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ Q &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ R &= -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

Dans le cas où l'écoulement est incompressible, la condition  $Tr(A) = 0$  implique :

$$P = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$Q = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = -\frac{1}{2}Tr(A^2) \quad (\text{A.3})$$

$$R = -\frac{1}{3}(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) = -\frac{1}{3}Tr(A^3) \quad (\text{A.4})$$

Dans ce cas, les trois valeurs propres de  $A$  ne dépendent donc que des deux quantités  $Q$  et  $R$  définies par les relations (A.3) et (A.4).  $Q$  et  $R$  sont invariantes par rotation, on les appellera donc par la suite invariants.



La nature des valeurs propres de  $A$  ne dépend que du signe du discriminant  $D = 27R^2 + 4Q^3$  [83]. Si  $D < 0$  (resp.  $D > 0$ ), alors les trois valeurs propres sont réelles (resp. deux sont complexes conjuguées). Pour  $D = 0$  les valeurs propres sont réelles et deux d'entre elles sont égales. D'autre part, si  $R < 0$  (resp.  $R > 0$ ), deux valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle négative (resp. positive). On rappelle que la condition d'incompressibilité implique que la somme de ces valeurs propres doit être nulle. Toutes ces informations peuvent se représenter de manière synthétique dans le plan  $(R, Q)$  (voir figure A.1), où l'on peut distinguer les régions de l'écoulement dominées par les nappes de vorticité, les filaments de vorticité, les nappes de déformations, ou les filaments de déformations.

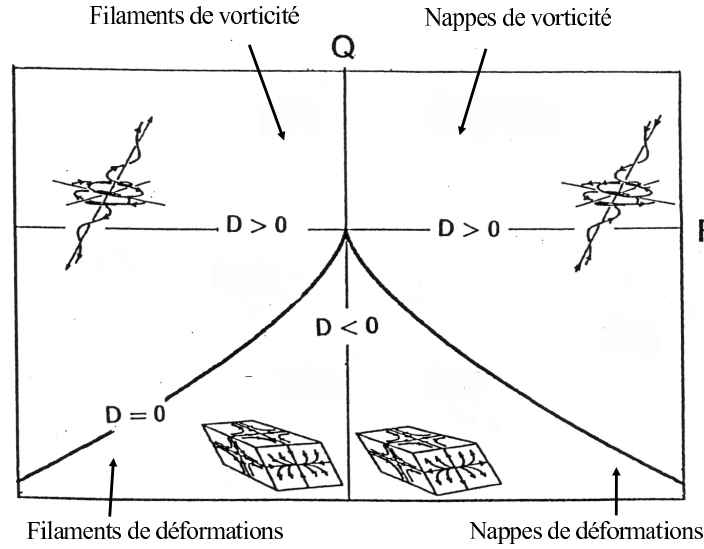


FIG. A.1.: *Topologie locale de l'écoulement en fonction des invariants  $R$  et  $Q$  (d'après Cantwell).*

Cette analyse peut également s'appliquer au tenseur de gradient de vitesse moyenné à une échelle  $r$ ,  $M$ . Dans ce cas ce n'est plus la topologie locale qui est caractérisée par les invariants  $Q$  et  $R$ , mais la topologie de l'écoulement à l'échelle  $r$ .

## A.2. La dynamique d'Euler Restreinte

Un modèle pour la dynamique du tenseur de gradient de vitesse au sens des dérivées  $A_{ij} = \partial_i u_j$  a été proposé par Vieillefosse [84, 85], puis repris par Cantwell [83]. En effet, on peut obtenir une équation exacte pour la dynamique de  $A$  en différentiant l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t u_j + u_k \partial_k u_j = -\partial_j p + \nu \partial_{kk} u_j$$

par rapport à  $x_i$ . On obtient :

$$\partial_t A_{ij} + u_k \partial_k A_{ij} + A_{ij}^2 = -\partial_{ij} p + \nu \partial_{kk} A_{ij} \quad (\text{A.5})$$

Vieillefosse s'intéresse au cas d'un fluide parfait ( $\nu = 0$ ). La fermeture de l'équation (A.5) passe alors par la modélisation du Hessien de pression  $\partial_{ij} p$ . La forme choisie dans [84, 85, 83] est isotrope :  $\partial_{ij} p = -\frac{1}{3} \text{Tr}(A^2) \delta_{ij}$  (le facteur  $-\frac{1}{3} \text{Tr}(A^2)$  permet de maintenir la condition d'incompressibilité  $\text{Tr}(A) = 0$  à tout temps). Dans ce cas, (A.5) devient :

$$\frac{dA_{ij}}{dt} + A_{ij}^2 - \frac{1}{3} \text{Tr}(A^2) \delta_{ij} = 0 \quad (\text{A.6})$$

où  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée lagrangienne.

La dynamique (A.6) est connue sous le nom de dynamique d'Euler Restreinte. L'hypothèse d'isotropie de la pression n'est pas physique, mais elle est suffisamment simple pour rendre l'équation (A.6) soluble analytiquement en fonction des invariants  $Q$  et  $R$ . En effet (A.6) implique :

$$\frac{dA_{ij}^2}{dt} + 2A_{ij}^3 - \frac{2}{3} \text{Tr}(A^2) A_{ij} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{dA_{ij}^3}{dt} + 3A_{ij}^4 - \text{Tr}(A^2) A_{ij}^2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

En prenant les traces des équations (A.7) et (A.8) et en utilisant les égalités (A.2), (A.3) et (A.4), il vient :

$$\frac{dQ}{dt} = -3R \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} Q^2 \quad (\text{A.10})$$

où on a appliqué le théorème de Cayley-Hamilton à l'équation (A.1) pour exprimer  $\text{Tr}(A^4)$  en fonction de  $\text{Tr}(A^2)$ .

Le portrait de phase associé au système (A.9,A.10) est le suivant :

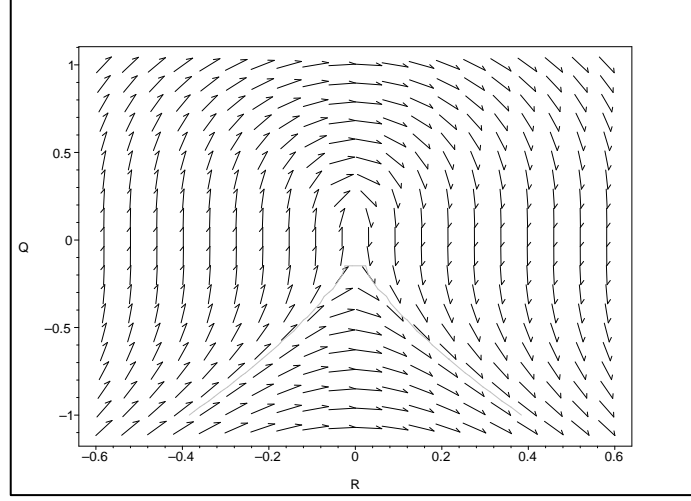


FIG. A.2.: *Portrait de phase de la dynamique d'Euler Restreinte.*

Les solutions du système (A.9,A.10) sont présentées dans [83]. Le résultat majeur de cette étude est le fait que pour toute condition initiale autre que  $R < 0$ ,  $27R^2 + 4Q^3$ , le tenseur de gradient de vitesse évolue vers une géométrie telle que le tenseur des déformations  $S = \frac{1}{2}(A + A^t)$  ait deux valeurs propres positives et que la vorticité soit alignée avec l'axe associé à la valeur propre positive intermédiaire de  $S$ . Cette caractéristique a été retrouvée dans des DNS [86]. La dynamique (A.9,A.10) permet aussi d'interpréter certaines caractéristiques des PDF jointes de  $Q$  et  $R$  calculées par DNS dans [87, 88].

Mais l'inconvénient majeur de ce modèle r s de dans le fait que les solutions de la dynamique d'Euler Restreinte divergent en temps fini. De plus, elles ne dépendent d'aucune condition à grande échelle. L'hypothèse d'isotropie de la pression, qui n'était a priori pas physique, est donc à rejeter, mais certaines caractéristiques des solutions de la dynamique d'Euler Restreinte sont encourageantes, et il semble prometteur de continuer sur cette voie pour construire un modèle pour la dynamique du tenseur de gradient de vitesse. C'est dans ce cadre qu'a été proposé le modèle du tétraèdre [7].

## B. Résultats de DNS

On rassemble dans ce chapitre quelques résultats de DNS avec lesquels on peut comparer les solutions du modèle. Ces résultats ont été calculés par Alain Pumir, avec le code pseudo-spectral standard décrit en [89]. Les runs considérés ont une résolution de  $256^3$ . Le plus grand nombre d'onde de la simulation,  $k_{max}$ , est suffisamment grand pour décrire les plus petites échelles de l'écoulement ( $k_{max}\eta \geq 1.4$ ). Le nombre de Reynolds est  $R_\lambda = 130$ , et le rapport entre l'échelle intégrale et l'échelle de Kolmogorov est  $L/\eta \sim 100$ . Le bas de la gamme inertielle se trouve approximativement à une échelle de  $10\eta$ . La gamme inertielle a donc dans ces simulations une taille d'environ 10 ordres de grandeur en échelle.

Sur la figure B.1 sont représentées les lois d'échelles des seconds moments de  $S$  et de la vorticité, et du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ ,  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$ . Selon le scaling K41,  $\Delta u(r) \sim r^{1/3}$ , et donc  $M$  devrait avoir une dépendance vis à vis de l'échelle en  $r^{-2/3}$ . On s'attend donc à ce que  $\langle Tr(S^2) \rangle$  et  $\langle \omega^2 \rangle$  varient en  $r^{-4/3}$  et à ce que  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle \sim r^{-2}$  (ou, de manière équivalente, à ce que le transfert d'énergie  $\langle -r^2 Tr(M^2 M^t) \rangle$  soit indépendant de  $r$ ). Le scaling K41 est donc vérifié de façon satisfaisante selon les résultats de DNS.

On a représenté sur la figure B.2 des fonctions distributions de probabilité jointes  $P(R, Q)$  calculées par DNS à plusieurs échelles de longueur. À l'échelle intégrale  $L$ , la distribution est quasiment symétrique par rapport à l'axe  $R = 0$ . Lorsque la valeur de l'échelle diminue, la distribution devient de plus en plus étirée le long de la partie  $R > 0$  de la séparatrice. Cette asymétrie augmente plutôt lentement quand  $r$  diminue tant qu'il reste dans la gamme inertielle (figures B.2(a-d)). Par contre, la distribution  $P(R, Q)$  obtenue pour une valeur de l'échelle dans la zone dissipative,  $r \sim \eta$ , (figure B.2(e)) est beaucoup plus asymétrique. Les effets dissipatifs, non inclus dans le modèle du tétraèdre, semblent donc responsables de cette augmentation d'asymétrie de  $P(R, Q)$ . On doit comparer les solutions de notre modèle avec les courbes B.2(a-d).

La figure B.3 représente les densités dans le plan  $(R, Q)$  de quelques grandeurs physiques, elles aussi calculées par DNS : la variance des déformations  $Tr(S^2)$ , l'enstrophie  $\omega^2$ , la production d'enstrophie  $\omega S\omega$ , le transfert d'énergie  $-r^2 Tr(M^2 M^t)$  et  $-Tr(S^3)$ .

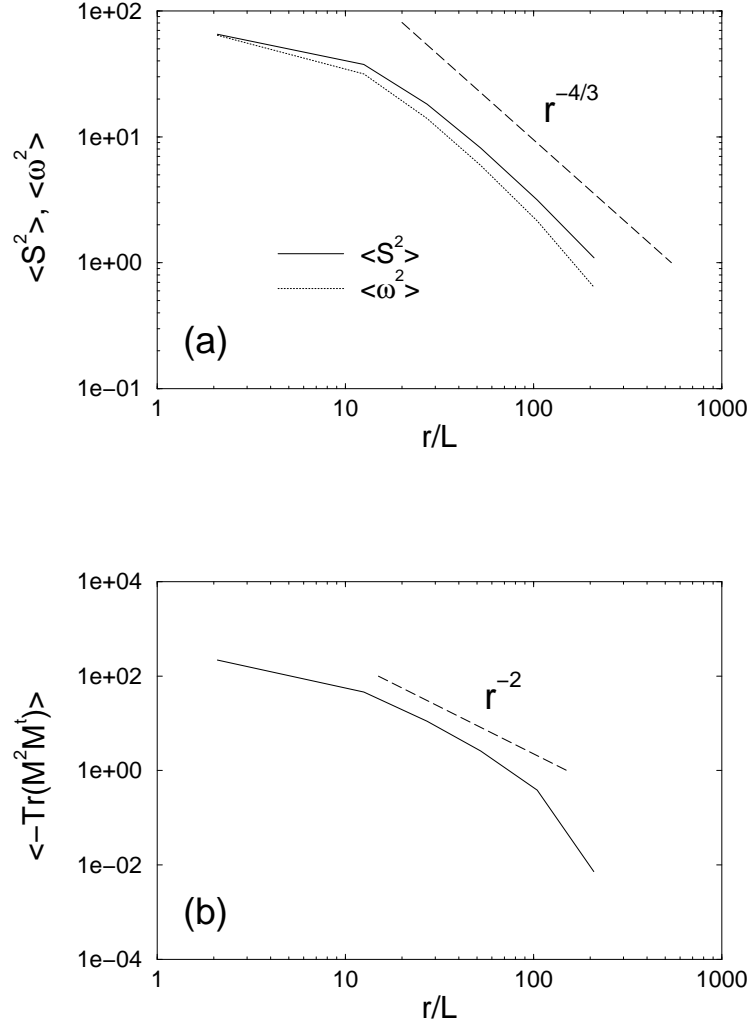


FIG. B.1.: *Lois d'échelles (a) des seconds moments des déformations et de la vorticité, et (b) du transfert d'énergie divisé par  $r^2$ ,  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$ , calculées par DNS (extrait de [90]).*

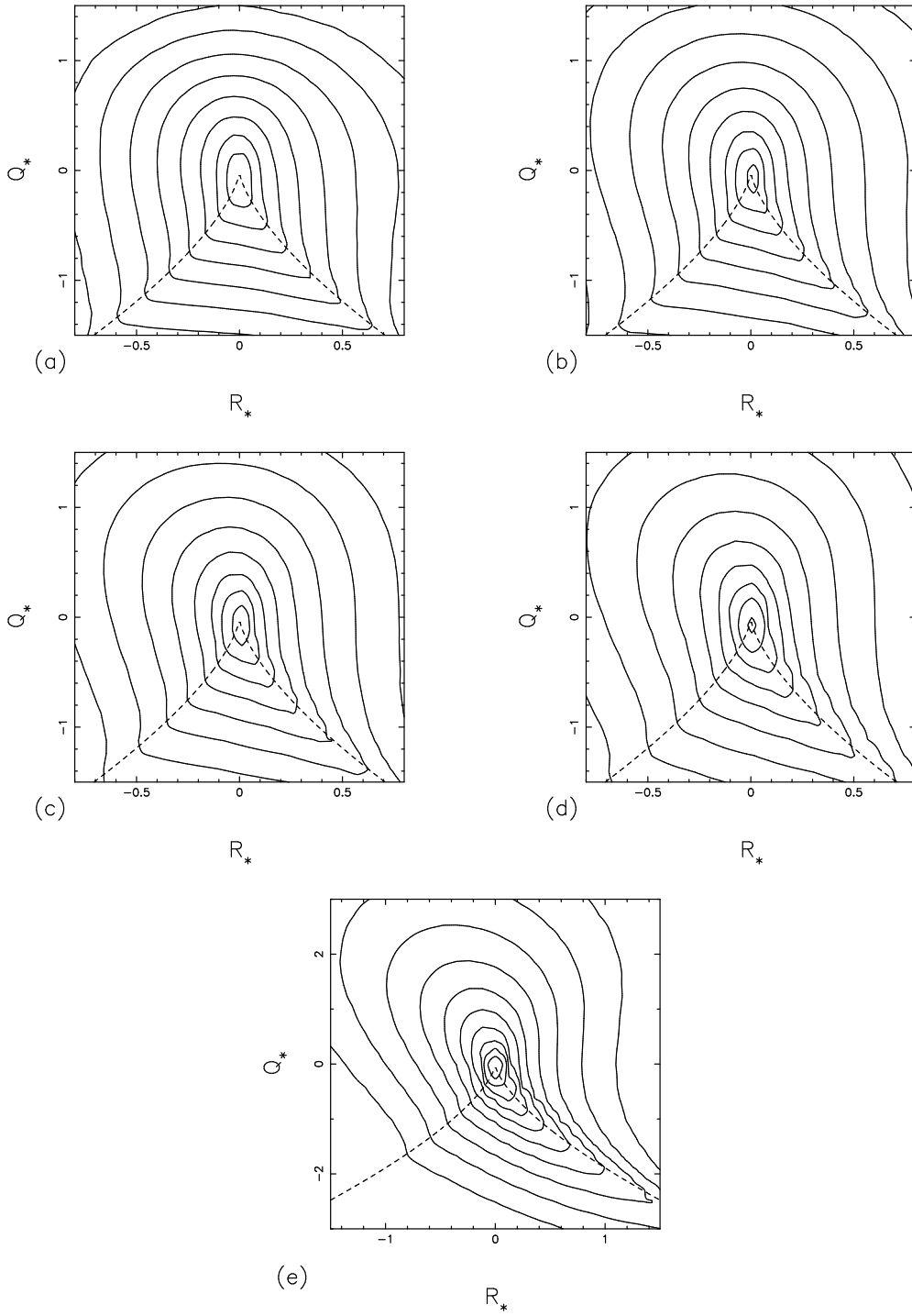


FIG. B.2.: Distributions de probabilité jointes  $P(R_*, Q_*)$  calculées par DNS à plusieurs échelles : (a)  $r=L$ , (b)  $r=L/2$ , (c)  $r=L/4$ , (d)  $r=L/8$  et (e)  $r=2\eta$ . Les quantités  $R_*$  et  $Q_*$  sont normalisées par la variance des déformations :  $Q_* = Q / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle$ ,  $R_* = R / \langle \text{Tr}(S^2) \rangle^{3/2}$ . Les lignes d'isoprobabilité sont espacées logarithmiquement, et séparées de facteurs  $e$  (extrait de [90]).

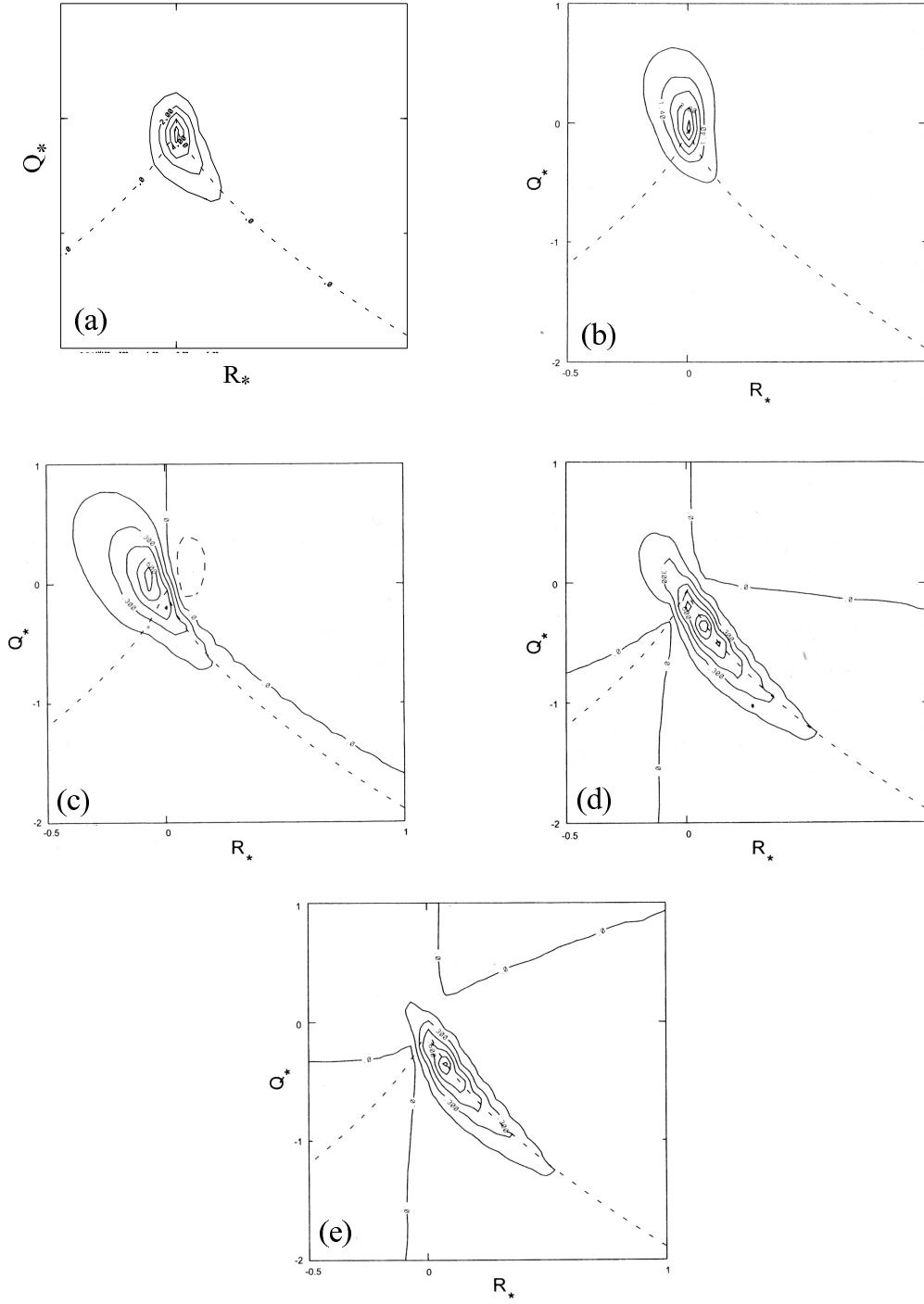


FIG. B.3.: Densités de (a)  $\text{Tr}(S^2)$ , (b) enstrophie  $\omega^2$ , (c) production d'enstrophie  $\omega S \omega$ , (d) transfert d'énergie  $-r^2 \text{Tr}(M^2 M^t)$  et (e)  $-\text{Tr}(S^3)$  dans le plan  $(R_*, Q_*)$ , pour  $r=L/8$ , calculées par DNS. Les lignes solides correspondent aux valeurs positives, les lignes en pointillés aux valeurs négatives. (a) est extrait de [91], (b), (c), (d) et (e) de [7].

## C. Méthodes d'optimisation

On présente ici les méthodes d'optimisation utilisées dans la première partie.

### C.1. La méthode de descente du simplexe

La description de la méthode effectuée ci-dessous est inspirée de [28].

Cette méthode, proposée par Nelder et Mead [92], permet de trouver le (un) minimum d'une fonction de  $N$  variables indépendantes ( $N > 1$ ). Dans le cas où la fonction considérée possède plusieurs minima locaux, la méthode ne garantit pas une convergence vers le minimum global. Elle n'utilise aucune méthode de minimisation de fonction dépendant d'une seule variable et ne nécessite que des évaluations de la fonction à minimiser (pas de calcul de dérivées).

L'objet fondamental de cette méthode est un simplexe, c'est-à-dire, dans un espace de dimension  $N$ , un ensemble de  $N+1$  points ainsi que les segments ou les faces polygonales qui les relient. Par exemple dans le plan c'est un triangle, dans un espace de dimension trois un tétraèdre. La méthode de descente du simplexe utilise des simplexes non dégénérés, ce qui signifie que ces derniers entourent des volumes fermés de dimension  $N$ . Comme toute méthode d'optimisation, elle passe par trois étapes : définition d'un point de départ, itération d'une procédure permettant de converger vers des valeurs de plus en plus basses de la fonction, arrêt de ces itérations lorsqu'un critère prédéfini est vérifié.

#### Point de départ

On doit fixer au début de la procédure un simplexe initial. Si on connaît a priori un point pour lequel on soupçonne que la valeur de la fonction considérée est plutôt basse, alors on peut choisir comme point de départ un simplexe dont un des sommets  $P_0$  est ce point, les autres sommets  $P_i$  étant définis par la relation

$$P_i = P_0 + \lambda \hat{e}_i$$

où  $\lambda$  est une taille caractéristique du système et  $\{\hat{e}_i\}_{i=1,\dots,N}$  une base normée de l'espace considéré.



## Procédure faisant converger vers les faibles valeurs de la fonction

Chaque pas de l'algorithme consiste en une transformation du simplexe (un « mouvement »). Ce mouvement peut être de quatre types (voir Fig. C.1)

- dans la majorité des cas, la transformation est une réflexion du point en lequel la valeur de la fonction est maximale (« plus haut point ») par rapport à la face opposée du simplexe (Fig. C.1(b) et (g)). Ces réflexions sont construites pour conserver le volume du simplexe, et conserver ainsi sa non-dégénérescence.
- après ce type de mouvement, si l'étirement du simplexe dans la direction de la réflexion ou dans la direction opposée est favorable pour la convergence, alors cet étirement est effectué (Fig. C.1(c) et (h)).
- lorsqu'il atteint une « vallée », l'algorithme contracte le simplexe dans la direction transverse de celle-ci pour pouvoir descendre dedans (Fig. C.1(d) et (i)).
- l'algorithme peut aussi contracter le simplexe dans toutes les directions pour s'approcher d'un minimum de la fonction (Fig. C.1(e) et (j)).

Une séquence appropriée de ces pas converge toujours vers un minimum (local) de la fonction.

### Critère d'arrêt

L'algorithme s'arrête lorsque la diminution relative de la valeur de la fonction au point le plus bas d'un pas au suivant est inférieure à une valeur définie au début de l'algorithme.

Par prudence, une fois cette condition remplie on peut relancer l'algorithme avec comme point de départ le point vers lequel il a convergé la première fois et N autres points (différents des sommets du dernier simplexe).

## C.2. Le recuit simulé

### C.2.1. Généralités

La méthode du recuit simulé [93, 94] est une technique d'optimisation pouvant s'appliquer à deux types de problèmes : l'optimisation combinatoire (applications à la résolution du problème du voyageur de commerce, à la conception de réseaux d'échangeurs de chaleur, de pipelines ou de cascades de réacteurs, à l'arrangement d'éléments dans des circuits intégrés complexes, ...), et l'optimisation d'une fonction dont les variables sont continues. Cette méthode permet de localiser l'extremum (minimum ou maximum) *global* d'une fonction, même lorsque celle-ci possède de

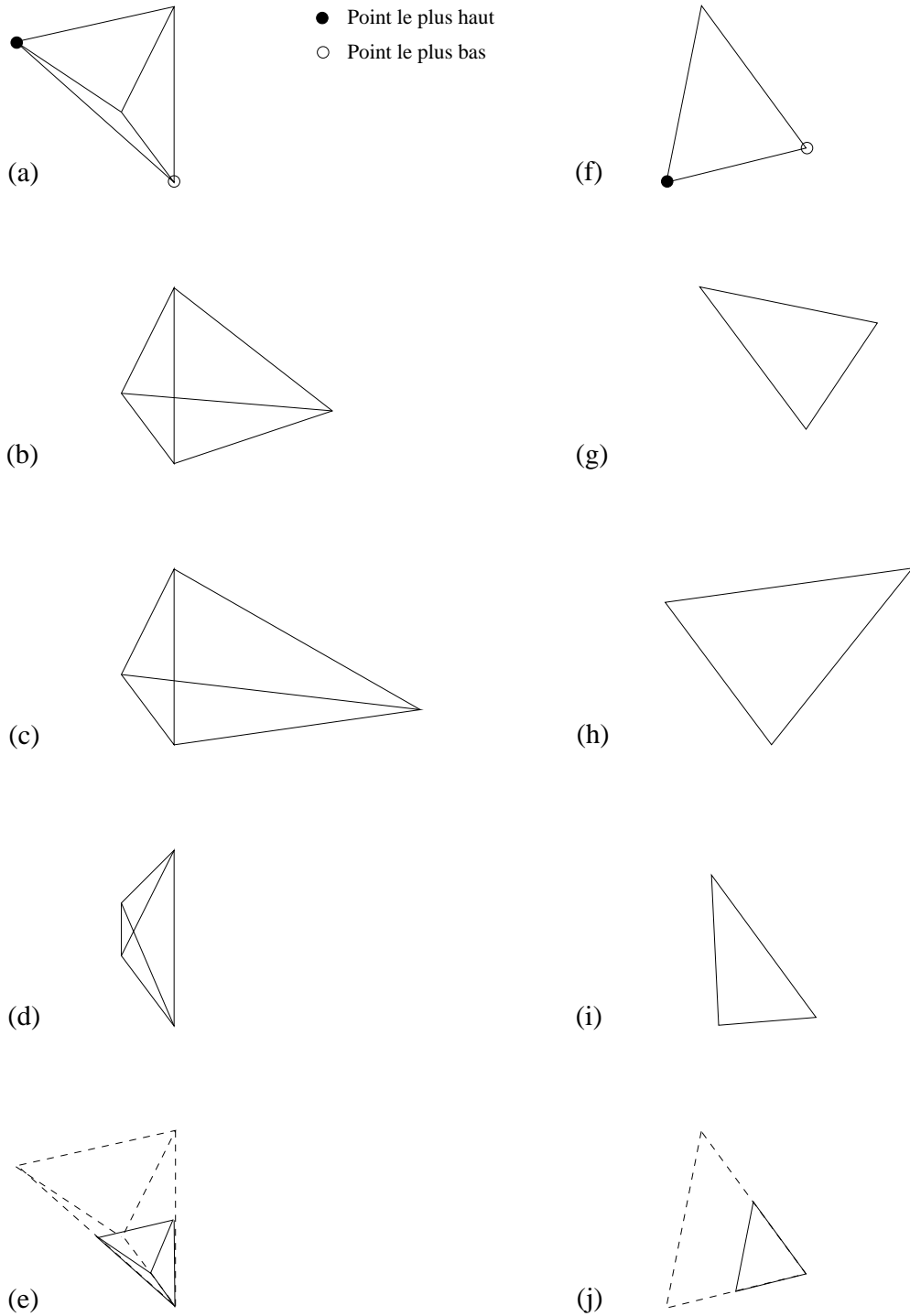


FIG. C.1.: Différents types de mouvements effectués par l'algorithme, dans les cas  $N=3$  (a-e) et  $N=2$  (f-j).

(a) et (f) : simplexe de départ, (b) et (g) : réflexion du point le plus haut, (c) et (h) : réflexion et étirement, (d) et (i) : contraction dans une dimension, (e) et (j) : contraction dans toutes les dimensions.

nombreux extrema locaux. Comme la méthode du simplexe, elle ne nécessite que des évaluations de la fonction. Dorénavant on suppose, sans perte de généralité, que l'on recherche le minimum d'une fonction.

La méthode du recuit simulé est basée sur des concepts de mécanique statistique, par analogie avec la manière dont les liquides se cristallisent en gelant, ou dont un métal est recuit. Considérons en effet un liquide à haute température. Les molécules qui le composent sont alors libres de se déplacer les unes par rapport aux autres (agitation thermique). Si on diminue progressivement la température, alors les atomes se figent dans une configuration cristalline parfaite, qui correspond à une valeur minimale de l'énergie du solide. Par contre, dans le cas où la température est abaissée brusquement, ceux-ci n'ont pas le temps de se redistribuer, et le cristal obtenu n'est pas parfait. L'énergie de ce solide est plus élevée que celle du cristal parfait. La méthode du recuit simulé est basée sur une analogie avec ce procédé, en comparant l'énergie avec la fonction à minimiser, la configuration atomique du cristal avec l'état des variables de la fonction, et l'état de plus basse énergie avec le minimum global de la fonction.

### C.2.2. Algorithme de Metropolis

Plus précisément, la méthode est dérivée de celle de Metropolis [95], qui applique à un système numérique le principe de la loi de Boltzmann bien connue en mécanique statistique. Selon cette dernière, l'énergie  $E$  d'un système à l'équilibre à une température  $T$  a une valeur distribuée aléatoirement selon la loi :

$$P(E) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right),$$

$k$  étant la constante de Boltzmann et  $Z$  la fonction de partition du système. Un système thermodynamique simulé selon l'algorithme de Metropolis peut alors passer d'une configuration d'énergie  $E_1$  à une autre d'énergie  $E_2$  avec la probabilité :

$$\begin{cases} \exp[-(E_2 - E_1)/kT] & \text{si } E_2 > E_1 \\ 1 & \text{si } E_2 < E_1 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Ainsi, la tendance générale de l'algorithme de Metropolis consiste à diminuer l'énergie du système (tous les mouvements qui la diminuent sont acceptés), mais on en autorise également l'augmentation. Cette possibilité d'augmenter légèrement l'énergie du système est un ingrédient essentiel de la méthode de Metropolis (et donc du recuit simulé) car elle permet de sortir de la cuvette formée par un minimum local et de repartir ainsi à la recherche d'un autre minimum éventuellement plus bas (Fig. C.2). Notons également que selon l'équation (C.1) plus la température est basse et plus l'amplitude des sauts d'énergie autorisés est faible : on « calme » la dynamique en diminuant la température.

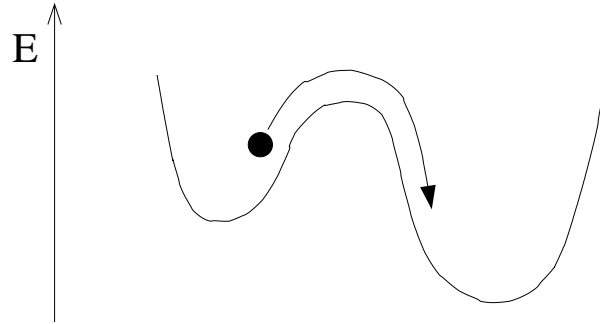


FIG. C.2.: L'algorithme de Metropolis autorise certains mouvements faisant augmenter la valeur de l'énergie, évitant ainsi le piégeage dans les cuvettes formées par les minima locaux de l'énergie.

### C.2.3. Schéma général de l'algorithme du recuit simulé

L'algorithme de Metropolis, qui s'applique en principe à la simulation de systèmes thermodynamiques, est repris dans la méthode du recuit simulé. Voici le schéma général de cette méthode dans le cas où l'on cherche le minimum global d'une fonction :

1. **Point de départ** : on choisit une configuration du système, c'est à dire un ensemble de valeurs des variables de la fonction.
2. **Réalisation de l'« équilibre thermique »** : on propose une suite de  $n$  mouvements aléatoires de cette configuration, en l'acceptant ou en la refusant selon le critère (C.1). L'énergie d'une configuration du système thermodynamique est ici remplacée par la valeur de la fonction.  $kT$  est remplacé par un paramètre  $T_{RS}$ , appelé « pseudo-température » ou « température recuite », qui gère la probabilité d'acceptation des mouvements. La valeur de  $T_{RS}$  doit être pour l'instant fixée. Poursuivant l'analogie avec le refroidissement d'un système thermodynamique, on peut dire que la réalisation de ces  $n$  mouvements a pour but de permettre au système d'atteindre son équilibre thermique à la température  $T_{RS}$ .
3. **Décroissance de la « température »** : on recommence la procédure 2. en diminuant à chaque fois la valeur de  $T_{RS}$ .
4. **Arrêt** : l'algorithme s'arrête lorsqu'un critère préalablement défini est vérifié.

### C.2.4. Forces et faiblesses du recuit simulé

La méthode du recuit simulé est la plus générale pour calculer numériquement le minimum d'une fonction. Elle peut s'appliquer à toute fonction, continue ou pas,

pourvu qu'on sache évaluer la valeur de celle-ci en fonction de ses variables. Outre l'analogie avec la mécanique statistique, cette méthode est construite sur la théorie des chaînes de Markov qui lui assurent des propriétés de convergence asymptotique : elle converge toujours vers le minimum global de la fonction pour un nombre infini d'itérations [93].

Cependant, c'est une méthode assez difficile à mettre en oeuvre car elle nécessite une définition de l'espace de recherche et de la nature des mouvements, ainsi que de nombreux paramètres : la température recuite initiale, le nombre de mouvements  $n$  nécessaire pour atteindre l'équilibre thermique, le schéma de décroissance de la pseudo-température (que signifie « décroissance suffisamment lente » ?), le critère d'arrêt, ... En choisissant judicieusement les valeurs de ces paramètres, on peut s'assurer une convergence plus ou moins rapide de l'algorithme. Ces valeurs sont en général difficiles à prévoir sans effectuer des tests préliminaires sur la fonction considérée.

### C.3. L'algorithme « amebsa »

Une bonne méthode pour calculer numériquement le minimum global d'une fonction de  $N$  variables indépendantes ( $N > 1$ ) possédant de nombreux minima locaux est dérivée des deux méthodes d'optimisation exposées ci-dessus. Nous avons ainsi retenu l'algorithme « amebsa » proposé dans [29].

Comme dans la méthode du simplexe, celui-ci applique à un simplexe de variables de la fonction des transformations pouvant être des réflexions, des expansions ou des contractions. Il incorpore en plus à cette méthode une procédure de Metropolis de la façon suivante : chacune des valeurs de la fonction correspondant à un sommet du simplexe se voit ajouter une variable aléatoire positive distribuée logarithmiquement et multipliée par une pseudo-température, et chaque point essayé comme point de remplacement se voit soustraire une variable aléatoire du même type. Comme dans le cas de l'algorithme de Metropolis ordinaire, tous les mouvements de descente sont acceptés, alors que ceux augmentant la valeur de la fonction sont acceptés de façon probabiliste. Lorsque la température de recuit diminue, l'amplitude de ce type de mouvements diminue aussi. Dans le cas où cette pseudo-température est nulle, l'algorithme applique simplement la méthode du simplexe. Comme dans la méthode du recuit simulé, cette température doit être baissée suffisamment lentement pour assurer la convergence vers le minimum global de la fonction. On doit aussi se fixer de nombreux paramètres, grâce à des tests préliminaires :

#### – Simplexe initial

Pour un nombre infini d'itérations le choix du simplexe initial n'a pas d'importance. Cependant, dans le cas d'un calcul réel il est judicieux de choisir l'un des sommets du

simplexe initial comme un point dont on soupçonne qu'il sera proche du minimum recherché.

– **Choix de la pseudo-température initiale**

La valeur de la température recuite initiale décide de la partie de l'espace qui va être sondée par l'algorithme. Si cette valeur est trop faible, on peut ne pas parcourir une assez grande plage de valeurs des variables de la fonction et par conséquent manquer le minimum global. Au contraire, si la pseudo-température initiale est trop élevée alors l'algorithme va passer beaucoup de temps à explorer des régions inintéressantes de l'espace des variables, le calcul étant alors considérablement ralenti. Il est donc nécessaire de trouver un bon compromis entre ces deux solutions.

– **Longueur d'un palier de recuit (nombre de mouvements à température recuite fixée)**

Le problème est le même que pour le choix de la pseudo-température initiale, un compromis étant nécessaire entre des temps de calcul trop longs et une exploration trop partielle de l'espace des variables.

– **Schéma de décroissance de la température recuite**

On a déjà vu que le succès d'un algorithme de recuit simulé passe par la décroissance suffisamment lente de cette température. On peut tester des décroissances exponentielles, en lois de puissance, ou dont l'amplitude est proportionnelle à la différence entre la meilleure valeur de la fonction dans le simplexe de fin de palier et la meilleure valeur rencontrée auparavant.

– **Condition d'arrêt**

On peut se fixer à l'avance un nombre de paliers de recuit.



## D. Équations d'Euler-Lagrange

Ce chapitre regroupe les expressions des membres des équations d'Euler-Lagrange dans les différentes approches utilisées. Dans tous les cas on a au préalable effectué le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} dt' = \varepsilon^{-1/3} \rho^{2/3} dt \\ M = \varepsilon^{1/3} \rho^{-2/3} m \end{cases}$$

### D.1. Approche lagrangienne de la version complète du modèle ( $C_{\parallel} = C_{\perp}$ )

Dans ce cas les variables considérées sont  $m$  et  $\rho$ . On a :

$$\mathcal{L} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}m \cdot \mathcal{D}m^t)}{2C_{\eta}} + \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}\rho \cdot \mathcal{D}\rho^t)}{2C_{\perp} \rho^2 \sqrt{\text{Tr}(mm^t)}}$$

avec :

$$\mathcal{D}m = \frac{dm}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} m + (1 - \alpha) (m^2 - \text{Tr}(m^2) \Pi)$$

et

$$\mathcal{D}\rho = \frac{d\rho}{dt} - \rho m$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées sont les suivantes :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{m}_{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{ab}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}_{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{ab}}$$

où :



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{ab}} = & -\frac{1}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} \frac{\mathcal{D}m_{ab}}{C_\eta} + \frac{(1-\alpha)}{C_\eta} [(\mathcal{D}m.m^t)_{ab} + (m^t.\mathcal{D}m)_{ab} - 2\text{Tr}(\Pi.\mathcal{D}m)m_{ab}^t] \\ & - \frac{(\rho^t.\mathcal{D}\rho)_{ab}}{C_\perp \rho^2 \sqrt{\text{Tr}(mm^t)}} - \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}\rho.\mathcal{D}\rho^t)}{2C_\perp \rho^2 [\text{Tr}(mm^t)]^{3/2}} m_{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{ab}} = & \frac{2}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}m.m^t)}{C_\eta \rho^2} \rho_{ab} - \frac{2}{3} \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}m.m^t)}{C_\eta \rho^2} \dot{\rho}_{ab} - (1-\alpha) \frac{\text{Tr}(m^2)}{C_\eta} \frac{\partial \Pi_{cd}}{\partial \rho_{ab}} \mathcal{D}m_{cd} \\ & - \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}\rho.\mathcal{D}\rho^t)}{C_\perp \rho^4 \sqrt{\text{Tr}(mm^t)}} \rho_{ab} - \frac{(\mathcal{D}\rho.m^t)_{ab}}{C_\perp \rho^2 \sqrt{\text{Tr}(mm^t)}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{m}_{ab}} = \frac{\mathcal{D}m_{ab}}{C_\eta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}_{ab}} = -\frac{2}{3} \frac{\text{Tr}(\mathcal{D}m.m^t)}{C_\eta \rho^2} \rho_{ab} + \frac{\mathcal{D}\rho_{ab}}{C_\perp \rho^2 \sqrt{\text{Tr}(mm^t)}}$$

Remarque : on doit ajouter un multiplicateur de Lagrange pour tenir compte de la condition  $\text{Tr}(m) = 0$ .

## D.2. Approche hamiltonienne de la version complète du modèle

Les variables considérées sont  $m$  et  $g$  ainsi que leurs variables conjuguées  $pm$  et  $pg$  [27]. On a :

$$H = -\frac{1}{2} C_\eta \text{Tr}(pm.pm^t) + \text{Tr}(pm.\mathcal{D}m^t) - \frac{1}{2} (pg)_{ab} G_{ab,cd} (pg)_{cd} + \text{Tr}(pg.\mathcal{D}g)$$

avec :

$$\mathcal{D}m = \frac{dm}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} m + (1-\alpha) (m^2 - \text{Tr}(m^2) \Pi)$$

$$\mathcal{D}g = \frac{dg}{dt} - gm - m^t g$$

et

$$G_{ab,cd} = 4C_{\parallel}\sqrt{Tr(mm^t)}g_{ab}g_{cd} + C_{\perp}\sqrt{Tr(mm^t)}[\rho^2(g_{bd}\delta_{ac} + g_{bc}\delta_{ad} + g_{ad}\delta_{bc} + g_{ac}\delta_{bd}) - 4g_{ab}g_{cd}]$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors les suivantes :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{m}_{ab}} = \frac{\partial H}{\partial m_{ab}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{g}_{ab}} = \frac{\partial H}{\partial g_{ab}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{p}m_{ab}} = \frac{\partial H}{\partial pm_{ab}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{p}g_{ab}} = \frac{\partial H}{\partial pg_{ab}}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial m_{ab}} &= -\frac{1}{3}\frac{d \ln \rho^2}{dt}pm_{ab} + (1 - \alpha)[(pm.m^t)_{ab} + (m^t.pm)_{ab} - 2Tr(pm.\Pi)m_{ab}^t] \\ &\quad - \frac{1}{2}pg.G.pg\frac{m_{ab}}{Tr(mm^t)} - 2(g.pg)_{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{3}Tr(pm.m^t)\frac{Tr(\dot{g})}{\rho^4}\delta_{ab} - (1 - \alpha)Tr(m^2)pm_{cd}\frac{\partial \Pi_{cd}}{\partial g_{ab}} - \frac{1}{2}pg_{cd}\frac{\partial G_{cd,ef}}{\partial g_{ab}}pg_{ef} \\ &\quad - (m.pg)_{ab} - (pg.m^t)_{ab} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial pm_{ab}} = -C_{\eta}pm_{ab} + Dm_{ab}$$

$$\frac{\partial H}{\partial pg_{ab}} = -\frac{1}{2}G_{ab,cd}pg_{cd} - \frac{1}{2}pg_{cd}G_{cd,ab} + Dg_{ab}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{m}_{ab}} = pm_{ab}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{g}_{ab}} = -\frac{1}{3}Tr(pm.m^t)\frac{\delta_{ab}}{\rho^2} + pg_{ab}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{p}m_{ab}} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{p}g_{ab}} = 0$$

On doit ajouter des multiplicateurs de Lagrange pour tenir compte des conditions  $Tr(m) = 0$ ,  $Tr(pm) = 0$ , et  $g$  et  $pg$  symétriques.

## D.3. Approche lagrangienne de la version simplifiée du modèle

Dans ce cas les variables considérées sont  $m$  et  $g$ . On a :

$$\mathcal{L} = \frac{Tr(\mathcal{D}m.\mathcal{D}m^t)}{2C_\eta}$$

avec :

$$\mathcal{D}m = \frac{dm}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} m + (1 - \alpha) (m^2 - Tr(m^2) \Pi)$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée est la suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{m}_{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{ab}}$$

où :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{ab}} = -\frac{1}{3} \frac{d \ln \rho^2}{dt} \frac{\mathcal{D}m_{ab}}{C_\eta} + \frac{(1 - \alpha)}{C_\eta} [(\mathcal{D}m.m^t)_{ab} + (m^t.\mathcal{D}m)_{ab} - 2Tr(\Pi.\mathcal{D}m)m_{ab}^t]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{m}_{ab}} = \frac{\mathcal{D}m_{ab}}{C_\eta}$$

On doit dans ce cas ajouter un multiplicateur de Lagrange pour tenir compte de la condition  $Tr(m) = 0$ .

## E. Articles

1. Le premier article « Transition to Spatiotemporal Chaos in a Two-Dimensional Hydrodynamic System », publié dans Physical Review Letters [71], décrit la transition au chaos spatio-temporel dans le système expérimental pour une huile de viscosité  $50 \text{ mm}^2/\text{s}$  (Deuxième Partie).
2. Le second article « Scale dependence of the coarse-grained velocity derivative tensor structure in turbulence », accepté par Physical Review E, traite de la résolution du modèle du tétraèdre dans l'approximation semi-classique (Première Partie).



## Transition to Spatiotemporal Chaos in a Two-Dimensional Hydrodynamic System

Christophe Pirat,<sup>\*</sup> Aurore Naso, Jean-Louis Meunier, Philippe Maïssa, and Christian Mathis*Institut du Non Linéaire de Nice (UMR CNRS 6618), Université de Nice Sophia Antipolis,**1361 Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France*

(Received 24 August 2004; published 7 April 2005)

We study the transition to spatiotemporal chaos in a two-dimensional hydrodynamic experiment where liquid columns take place in the gravity induced instability of a liquid film. The film is formed below a plane grid which is used as a porous media and is continuously supplied with a controlled flow rate. This system can be either ordered (on a hexagonal structure) or disordered depending on the flow rate. We observe, for the first time in an initially structured state, a subcritical transition to spatiotemporal disorder which arises through spatiotemporal intermittency. Statistics of numbers, creations, and fusions of columns are investigated. We exhibit a critical behavior close to the directed percolation one.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.134502

PACS numbers: 47.52.+j, 47.20.Dr, 68.15.+e, 68.18.Jk

Much effort has been devoted during the last two decades to the investigation of the appearance of disorder and of unpredictability in spatially extended systems. In particular, transition from a laminar to a chaotic state via *spatiotemporal intermittency* (STI) [1] was observed both numerically (coupled map lattices [2,3], partial differential equations [4,5]) and experimentally [6–8] in many one-dimensional systems. In two-dimensional (2D) systems transition to chaos via STI starting from some spatially homogeneous laminar states has been studied [9,10]. In 1986, Pomeau proposed [11] that the mechanism of STI could be analogous to directed percolation (DP), a stochastic model of contamination processes which predicts that the fraction of turbulent domains ( $F_t$ ) evolves as a function of the distance from threshold  $\varepsilon$  according to a power law  $\varepsilon^\beta$ . In this Letter, we study the transition to chaos via STI in a 2D system whose laminar state is a hexagonal lattice of columns of fluid and whose turbulent state is characterized by creations and fusions of columns. Coexistence of laminar and turbulent areas, fluctuating stochastically in space and time, is clearly seen in the direct observation of the system. We propose here to study tracers closely related to the system evolution, such as the number of columns and their creation and fusion rates. These latter tracers enable us to estimate  $F_t$ .

We report experimental results on the laminar-turbulent transition concerning the dynamics of liquid columns under an horizontal porous plane which is continuously supplied. We track all columns in the grid plane and measure their number, as well as their creations and fusions induced by the dynamics. As in one dimension [12], the system is dynamically characterized by two distinct states: a laminar one and one that exhibits an intrinsic and self-organized disorder. However, the situation is different since the turbulent state appears in our system via STI instead of defect-mediated turbulence [13], a mechanism in which one does not observe coexistence of laminar and turbulent patches. Moreover, in our case the two states do not interact without external intervention. The disordered state is much like a thermodynamical state, heated by a

phase turbulence-like noise. The transition from the laminar state to the turbulent one is subcritical and exhibits the characteristic trends of a first order transition including hysteresis and bistability due to competition between coexisting laminar and disordered flows.

The experimental setup, described in [14], consists of a circular and plane steel grid which is used as a porous medium and fixed horizontally at the bottom of a cylindrical tank, filled from above. The incoming fluid produces a uniform and laminar flow through the whole grid at a constant and well controlled rate  $q$  which feeds the thin layer underneath the grid. Because of the competition between gravity and surface tension [15], the flow is characterized by a wide variety of spatiotemporal structures. For an increasing flow rate, we can observe drops, liquid columns, and sheets [16]. We focus our attention on the columns regime (see Fig. 1) observed for a viscosity  $\nu \gtrsim 40$  cS. It was shown in [14] that a laminar state, characterized by a stationary hexagonal organization with a wavelength  $\lambda$  and induced by a Rayleigh-Taylor (RT) instability with flux, generally exists in a given range of flow rates for each viscosity. At higher values of the driving force, the loss of spatial order associated to a chaotic evolution of the columns positions can be observed.

The flow surface is 200 cm<sup>2</sup> under the grid of thickness 1 mm with circular holes of 1 mm in diameter arranged on a 2 mm regular hexagonal lattice. We have used silicone oil with a viscosity  $\nu = 50$  and 100 cS, a density  $\rho = 0.97$  g/cm<sup>3</sup> and a surface tension  $\gamma = 21$  dyn cm<sup>-1</sup>. We present here the results obtained for  $\nu = 50$  cS only, but we got qualitatively the same results for a 100 cS viscosity oil. A peripheral lighting allows us to see, from above through the grid, the local variation of the film curvature,

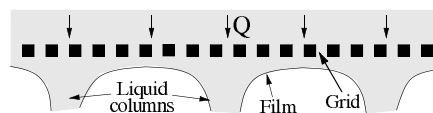


FIG. 1. Schematic drawing of the flow.

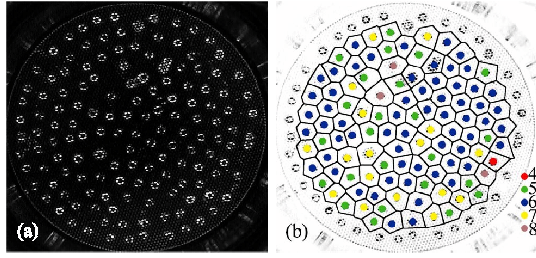


FIG. 2 (color online). (a) A typical frame and (b) its superimposed Voronoi construction. The legend indicates the number of nearest neighbors for each object.

by using the refractive properties of the oil. Liquid columns appear as small bright rings (the objects) [see Fig. 2(a)]. These objects are recorded as time frames at 25 frames/s with a digital CCD camera connected to a computer for video capture and processing. Data were recorded in 32 min long sequences for each flow rate (48 000 pictures, about  $7 \times 10^6$  objects detected). An *ad hoc* image processing allows us to make an individual detection of the objects, hence to count them and to record their positions for each frame. The results are obtained by treating the data collected for seven flow rates.

The spatiotemporal chaotic state is characterized by a varying number  $N$  of columns, all of which have the same size (except in a brief transient during creation and fusion). According to the local instantaneous density of these objects, one can observe a fusion event when two columns meet, combine, and become a single one, or a creation one in a temporary low density area [see Fig. 2(a)]. These two processes both take place all the time, whereas the number of columns fluctuates around a mean value for a given flow rate (i.e., fixed flow rate). At low flow rate, the system is in the laminar state and  $N = N_{\text{lam}}$  ( $= 169$  in our experiment). We find a critical flow rate  $q_c = 31 \pm 2 \text{ cm}^3/\text{s}$  such that this laminar state is stable with respect to external finite size amplitude perturbations if  $q < q_c$  and unstable if  $q > q_c$ , but we have experimental evidence that it is linearly stable in a range of  $q$  values. Hence the transition from the laminar to the disordered state appears to be of first order. In the following, we will use the control parameter  $\varepsilon =$

$\frac{q - q_c}{q_c}$  and the reduced number  $N/N_{\text{lam}}$  of liquid columns.

We consider the situation where  $\varepsilon > 0$  when the system has left the laminar regime. For increasing  $\varepsilon$ , the disorder progressively grows using the STI mechanism, the system becoming entirely turbulent for  $\varepsilon > \varepsilon_2$  [see Fig. 3(a)]. For  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , the system exhibits bistability between STI [Fig. 3(b)] and a quasilaminar state for which the bulk is stationary and hexagonal and the peripheral columns erratically slide on the boundary, with creations and coalescences mechanisms. This quasilaminar state is due to a competition between the hexagonal order and the geometrical constraint of the circular boundaries.

In order to characterize quantitatively the transition, we first study the statistics of the number  $N$  of columns of the system. As a first step, we represent in Fig. 4 the distributions of  $N/N_{\text{lam}}$  for different values of  $\varepsilon$ . The bimodal distributions in Figs. 4(b) and 4(c) illustrate the bistability between the quasilaminar state (small peak, large values of  $N$ ) and the more disordered one (large peak, small values of  $N$ ). It is also interesting to note that the mean number of objects clearly decreases with increasing  $\varepsilon$ , and that  $N$  is always lower than  $N_{\text{lam}}$ . The hexagonal organization with a wavelength  $\lambda$  enables the most compact arrangement of the liquid columns allowed in the system. This leads us to assume the existence of a constraint of minimal distance between the objects. We calculate the distribution of the distances between nearest neighbors. It is first necessary to compute the Voronoi construction [17] of the system of columns [see Fig. 2(b)]. In this approach, each nonperipheral liquid column is located in the center of each Voronoi cell. Distributions of distances between nearest neighbors near threshold and in the disordered state are represented in Fig. 5. Independently of the value of  $\varepsilon$ , almost no pair of columns approaches nearer than 9 mm, whereas very few nearest neighbors are mutually moved away for more than 22 mm. The maximum of probability of their distances is always about 11.5 mm, which is compatible with the wavelength of the perfect hexagonal lattice of columns  $\lambda = 11.6 \pm 0.1 \text{ mm}$ . The dispersion of the distribution increases with  $\varepsilon$ . Thus, the hexagonal organization resulting from the competition between gravity and surface tension for null or residual flow rates (RT instability) remains subjacent to the dynamics even in the disordered

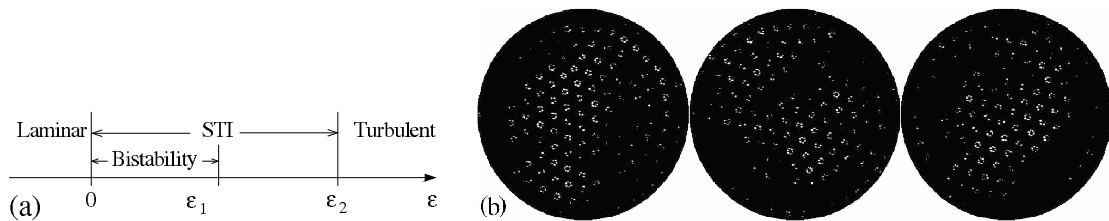


FIG. 3. (a) Schematic phase diagram for a viscosity of 50 cS as a function of the control parameter  $\varepsilon$ . (b) STI seen at three different times for  $\varepsilon = 0.72$ ; each view is obtained through temporal average over 3 s (75 frames) to distinguish laminar areas (bright objects) from turbulent ones (dark zones).

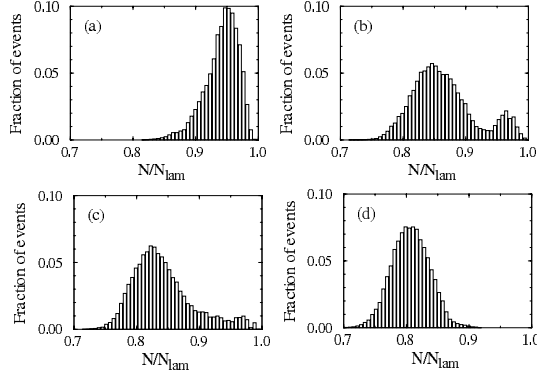


FIG. 4. Distributions of the reduced number  $N/N_{\text{lam}}$  of liquid columns for  $\varepsilon =$  (a) 0.05, (b) 0.21, (c) 0.47, and (d) 0.72 ( $N_{\text{lam}} = 169$ ). For  $\varepsilon \geq 0.72$ , the distribution remains qualitatively similar but its average decreases with increasing  $\varepsilon$ .

state. The existence of a minimal distance between the objects can be understood by reminding that two nearby liquid columns strongly attract themselves and combine because of surface tension effects.

We choose  $\langle 1 - N/N_{\text{lam}} \rangle$  as an order parameter ( $\langle \dots \rangle$  denotes average over time), which enables us to plot the phase diagram of the system (see Fig. 6). In this diagram, the two metastable states are separated by distinguishing the contributions of the two peaks with  $N/N_{\text{lam}} = 0.93$  as a cutoff between them, respectively, for  $\varepsilon = 0.21$  and  $\varepsilon = 0.47$  [see Figs. 4(b) and 4(c)]. For  $\varepsilon = 0.05$ , it is not possible to separate both states: this regime appears as a mixture of them, the disorder coming essentially from the boundaries, with intermittent incursions (some bursts) towards the center of the system. This order parameter enables a clear determination of the bistability zone.

The  $N$  dynamics is governed by the competition between creations and fusions of the columns. This kind of behavior (perpetual creations, moves, and fusions of objects) is reminiscent of that of topological defects [18]. For this reason, we define the mean temporal creation rate in a system with  $N$  objects as  $\Gamma_+(N) = \langle C_i \rangle_N$  and the fusion one as  $\Gamma_-(N) = \langle F_i \rangle_N$ , where  $C_i$  and  $F_i$  are, respectively,

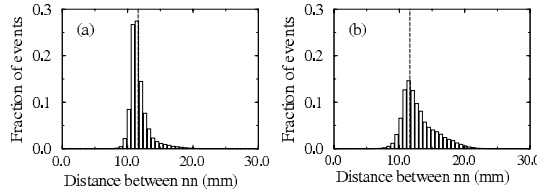


FIG. 5. Distributions of the distances between nearest neighbors for  $\varepsilon =$  (a) 0.05 and (b) 0.72. The distribution evolves continuously between both states. The dashed lines indicate the wavelength measured in the stationary lattice:  $\lambda = 11.6 \pm 0.1$  mm.

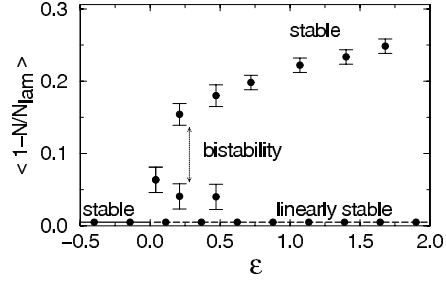


FIG. 6. Phase diagram of the system. The laminar state (line  $\langle 1 - N/N_{\text{lam}} \rangle = 0$ ) is stable for  $\varepsilon \leq 0$  and linearly stable for  $\varepsilon \geq 0$ . After a finite size amplitude perturbation, the system leaves this state and evolves, for  $\varepsilon$  near threshold between the upper (disordered state with STI) and the lower (quasilaminar state) branch (bistability), and for higher  $\varepsilon$  on the stable upper branch where the system becomes entirely turbulent for  $\varepsilon > \varepsilon_2$ .

the creation and fusion numbers between frames  $i$  and  $i + 1$  and  $\langle \dots \rangle_N$  denotes average over all the frames  $i$  where the number of columns  $N_i$  is  $N$ . Here, leaving and entering rates would be null because the objects can only slide on the boundaries. We present the method that we employ and our results: for each time frame, we consider each liquid column, and by comparing its position with those of the columns of the previous time frame ( $\Delta t = 1/25$  s), we

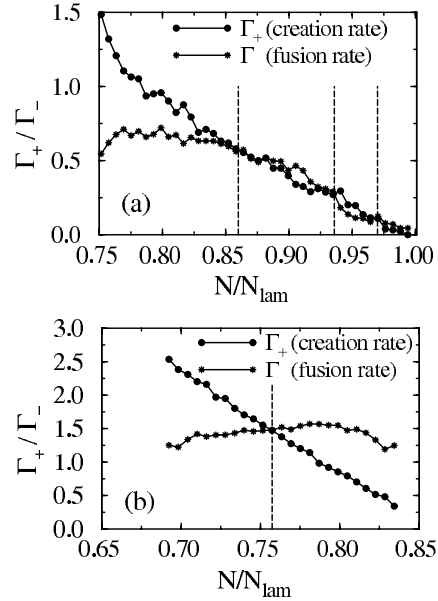


FIG. 7. Creation and fusion rates of liquid columns as a function of  $N/N_{\text{lam}}$  for  $\varepsilon =$  (a) 0.21 (bistability state) and (b) 1.69 (chaotic state). The dashed lines indicate the maxima (thick lines) and the minimum (thin line) of the corresponding  $N$  distributions [see Fig. 4(b) and qualitatively Fig. 4(d)].



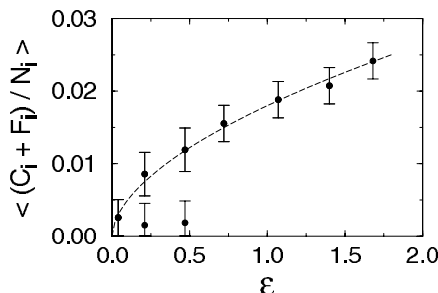


FIG. 8. Temporal average of the fraction of columns creations and fusions as a function of  $\varepsilon$ .

determine whether this object is a new one (just created), the result of the fusion of two objects (leading to the decrease by one unit), or an object which has moved. The creation and fusion durations are larger than  $\Delta t$  (about 3 to 4 times). The criterion we choose is the following: we calculate the distances between all the objects of the previous frame and the considered one, noting  $d_1 < d_2 < d_3 < \dots$ . If  $d_1 > v_{\max} \Delta t$ , then we suppose that the object has been just created; if  $d_2 < d_{\min}$ , then we suppose that the object is the result of the fusion of two other ones. The values of  $v_{\max}$  and  $d_{\min}$  have been determined by preliminary tests. The creation and fusion rates are shown as a function of  $N/N_{\text{lam}}$  on Fig. 7, in two different states. In the disordered state [Fig. 7(b)], the creation rate linearly decreases with  $N$  [ $\Gamma_+(N) = -\alpha_c N + \beta_c$ ], which can be easily understood geometrically, whereas the fusion rate slightly linearly increases [ $\Gamma_-(N) = \alpha_f N$ ], except for large values of  $N$  (in this case, the role of the boundary constraints becomes more important). The intersection between both straight lines corresponds to the maximum of the  $N$  distribution. In the bistability state [Fig. 7(a)], the creation rate has the same behavior as in the disordered state and the fusion rate characterizes first order effects, by crossing 3 times the creation one. These three points of intersection correspond to both the maxima and the minimum of the  $N$  distribution.

These creation and fusion numbers can also be associated to another measure of the disorder since they appear only in disordered regions. We have chosen to measure  $\langle (C_i + F_i) / N_i \rangle$ , where  $\langle \dots \rangle$  denotes temporal average, which gives the mean degree of disorder in the system. In Fig. 8 the evolution of this average as a function of  $\varepsilon$  is represented. As for  $\langle 1 - N/N_{\text{lam}} \rangle$  we have distinguished the two metastable states in the bistability region. The experimental points in the upper branch can be well fitted by a power law whose exponent is equal to  $0.56 \pm 0.05$ . As a first approximation, we consider that, at least near the critical point, the density of creations/fusions is constant into agitated domains in the STI regime. As these quantities are null in the laminar regions, one can suppose that the

mean size of the agitated domains is proportional to the mean number of these events. Within this hypothesis the upper branch in Fig. 8 reflects the qualitative behavior of the mean fraction of disordered domains  $F_l$  in the STI regime and the measured exponent is in good agreement with  $\beta = 0.58$  obtained from a  $(2 + 1)$ D model of DP [19].

Thus, the transition of our system to spatiotemporal chaos has been characterized by means of two different parameters. We have demonstrated the subcritical nature of this transition and, near threshold, the presence of bistability between STI and a quasilaminar state. In the STI regime, the turbulent fraction, described in terms of creations/fusions of objects, has been shown to vary according to a power law whose exponent is close to the  $(2 + 1)$ D DP one. All these studies have been done for viscosities for which disorder appears by increasing the flow rate, but for other values of the viscosity disorder can only arise by decreasing it [14]. The study of this second behavior and the transition between both will be deferred to a forthcoming publication.

The authors acknowledge helpful discussions with H. Chaté, L. Gil, and A. Pumir.

\*Electronic address: Christophe.Pirat@inln.cnrs.fr

- [1] H. Chaté and P. Manneville, in *Turbulence: A Tentative Dictionary*, edited by P. Tabelling and O. Cardoso (Plenum Press, New York, 1995), p. 111.
- [2] K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **74**, 1033 (1985).
- [3] H. Chaté and P. Manneville, Physica (Amsterdam) **32D**, 409 (1988).
- [4] H. Chaté and P. Manneville, Phys. Rev. Lett. **58**, 112 (1987).
- [5] L. Gil, Europhys. Lett. **48**, 156 (1999).
- [6] F. Daviaud, M. Dubois, and P. Bergé, Europhys. Lett. **9**, 441 (1989).
- [7] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder, Phys. Rev. Lett. **64**, 184 (1990).
- [8] P. Rupp, R. Richter, and I. Rehberg, Phys. Rev. E **67**, 036209 (2003).
- [9] H. Chaté and P. Manneville, Europhys. Lett. **6**, 591 (1988).
- [10] S. Bottin, F. Daviaud, P. Manneville, and O. Dauchot, Europhys. Lett. **43**, 171 (1998).
- [11] Y. Pomeau, Physica (Amsterdam) **23D**, 3 (1986).
- [12] P. Brunet and L. Limat, Phys. Rev. E **70**, 046207 (2004).
- [13] P. Coulet, L. Gil, and J. Lega, Phys. Rev. Lett. **62**, 1619 (1989).
- [14] C. Pirat, C. Mathis, P. Maïssa, and L. Gil, Phys. Rev. Lett. **92**, 104501 (2004).
- [15] D. Sharp, Physica (Amsterdam) **12D**, 3 (1984).
- [16] <http://www.inln.cnrs.fr/~pirat>
- [17] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).
- [18] L. Gil, J. Lega, and J.L. Meunier, Phys. Rev. A **41**, 1138 (1990).
- [19] H. Hinrichsen, Adv. Phys. **49**, 815 (2000).

## Scale dependence of the coarse-grained velocity derivative tensor structure in turbulence

Aurore Naso and Alain Pumir\*

*Institut Non Linéaire de Nice (U.M.R. C.N.R.S 6618),**Université de Nice Sophia Antipolis, 1361 Route des Lucioles, F-06560 Valbonne, France*

(Dated: September 21, 2005)

Velocity fluctuations in hydrodynamic turbulence have a non trivial structure, characterized by correlations of the velocity gradient tensor. In this paper, we consider a phenomenological model, incorporating the main features of hydrodynamic fluid turbulence, aimed at predicting the structure of the velocity gradient tensor,  $M$ , coarse-grained at a spatial scale  $r$ . This model [1] is formulated as a set of stochastic ordinary differential equations, with three dimensionless parameters, characterizing the reduction of the nonlinearity induced by the pressure term, the re-isotropization effect of the small scale velocity field, and the influence of the small scales on the coarse-grained velocity derivative tensor. Semiclassical solutions of this model are obtained and compared with direct numerical simulations (DNS) data. The DNS data show that the joint probability distribution function of the second and third invariants of  $M$  becomes increasingly skewed as the scale  $r$  decreases in the inertial range. The model results correctly reproduce this behavior provided the parameter that controls nonlinearity reduction is finely tuned; the influence of the other parameters in the model is much weaker.

PACS numbers: 47.27.Eq, 47.27.Gs, 02.70.Rr, 05.10.Gg

### I. INTRODUCTION

The seemingly random velocity fluctuations observed in a turbulent fluid motion are characterized by their spatial correlations. These correlations are responsible for the power law dependence of the energy spectrum, described by the Kolmogorov K41 theory [2]. Generally, it has proven fruitful to investigate spatial scaling properties of various velocity correlation functions, and in particular its deviations from the K41 theory [3]. One of the major limitations of these studies however is that the connection with the dynamical (Navier-Stokes) equations remains somewhat weak. The line of research pursued in this article is aimed at developing a better understanding of scaling properties, based on dynamical considerations [1].

The recent work on advection of a passive scalar by a turbulent flow [4] provides much inspiration and guidance for our present effort. As it is the case for the velocity field, the passive scalar exhibits strong deviations from K41 theory. A clear understanding of this problem has emerged from the study of simple models, such as the Kraichnan model [5] or other models [6]. The seemingly oversimplifying assumptions that allow one to solve the model still preserve the main physical aspects of the real solution [7, 8]. From a technical point of view, these models have pointed to the importance of lagrangian considerations.

The importance of the vorticity,  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ , to understand the dynamics of velocity fluctuations has been stressed many times [9–11]. Vorticity is essentially

the antisymmetric part of the velocity gradient tensor :

$$(m - m^t)/2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

where  $\omega_i$  is the component of the vorticity in the  $i^{th}$  direction. The strain, defined as the symmetric part of the velocity derivative tensor :  $S \equiv (m + m^t)/2$ , determines the local stretching of material lines, and of vorticity itself [12]. The velocity gradient tensor is therefore of crucial importance to understand the dynamics of turbulence.

Coarse-graining of the velocity gradient tensor over a region of scale  $r$ , by defining  $M_{ab} = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} m_{ab} d^3x$ , where  $\Gamma$  is a region of characteristic size  $r$ , provides an averaged description of the velocity gradient tensor at scale  $r$ , very appropriate in a number of contexts, for example in describing the energy transfer in turbulence [13], or more generally in Large Eddy Simulations (LES) [14]. Scaling laws are expected in the description of the coarse-grained matrix  $M$  as a function of scale.

To understand the dynamics of the matrix  $M$ , one must address the question of the (lagrangian) evolution of the volume  $\Gamma$ , advected by the flow. Our model couples in an essential way the evolution of the coarse-grained velocity gradient,  $M$ , and the geometry of the volume, represented by the moment of inertia tensor  $g$  of  $\Gamma$ . The problem can be posed as a set of stochastic differential equations [1]. Alternatively, the description of the system can be recast as a Fokker-Planck equation for the probability distribution function of  $(M, g)$  as a function of time,  $t$ . We focus here on the properties of statistically steady state turbulent flow, so we look for stationary solutions of the Fokker-Planck equations. Observing that the statistics are essentially gaussian at scale larger than the integral scale provides a boundary condition for the Fokker-Planck equation, which allows us to write an

\*Electronic address: Alain.Pumir@inln.cnrs.fr

explicit, although completely formal solution as a path integral [1].

To proceed any further requires a numerical evaluation of this path integral. In view of the complexity of the problem, we consider here a semiclassical solution of the problem. This approach is a significant improvement, compared to the very simplified approach used in [1], consisting in estimating the path integral by taking only the deterministic solution. The semiclassical approach accounts for the fluctuations in a more systematic manner. The search for the minimal action trajectory in the appropriate parameter space is not a straightforward task. The solution used here is based on a combination of simplex method (amoeba algorithm), coupled with a Monte-Carlo procedure. The latter is necessary to escape from numerous relative extrema.

Our results have been presented in the plane of the invariants of the matrix  $M$  (the  $(R, Q)$  plane [1, 15]), which leads to a synthetic presentation of the topology of the flow. The results of the model can be compared with the results of direct numerical simulations (DNS), obtained at moderate Reynolds number ( $R_\lambda = 130$ ), presented here, as well as with the results of experiments [14]. These results provide an important constraint in the study of this model.

The model is introduced in Section II. The description in terms of the  $(R, Q)$  plane is discussed in Section III, along with our DNS results. In Section IV, our method of resolution is presented. Section V is devoted to the results of this study. Finally, Section VI presents our concluding remarks.

## II. DERIVATION AND DEFINITION OF THE MODEL

In this section, we briefly recall the derivation of the model, and introduce our notation as well as the key parameters in the model.

We formulate the model here in terms of the matrix  $M$ , defining the coarse-grained velocity derivative, and the moment of inertia tensor,  $g$ , characterizing the geometry of the lagrangian volume. Our model describes the lagrangian evolution of  $M$  and  $g$  in terms of the following set of equations:

$$\frac{dM}{dt} + (1 - \alpha)(M^2 - \Pi Tr M^2) = \eta \quad (1)$$

$$\Pi \equiv g^{-1} / Tr(g^{-1}) \quad (2)$$

$$\frac{dg}{dt} - gM - M^t g - \beta \sqrt{Tr(MM^t)} \left( g - \frac{1}{3} Tr(g) Id \right) = 0 \quad (3)$$

$$\langle \eta_{ab}(\rho; t) \eta_{cd}(0; 0) \rangle = \gamma \left( \delta_{ac} \delta_{bd} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \frac{\varepsilon}{\rho^2} \delta(t) \quad (4)$$

where  $\rho^2 = Tr(g)$ .

Aside from the dimensional quantity  $\varepsilon$ , the energy dissipation, the model involves three dimensionless parameters,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ .

To justify these phenomenological equations, it is convenient to consider a tetrahedron of lagrangian particles, whose positions are  $\vec{r}_i$  ( $i = 1..4$ ). Because of the assumed homogeneity of the flow, the motion of the center of mass  $\vec{\rho}_0 = \sum_i \vec{r}_i$  is immaterial, so the geometry of the tetrad is described by a set of 3 reduced coordinates,  $\vec{\rho}_i$ . It is more convenient to define the tensor  $\rho_i^a$  where  $a$  is the spatial index, and the moment of inertia tensor  $g = \rho^t \rho$ .

The evolution equation for the coarse-grained velocity derivative tensor,  $M$ , is reminiscent of the evolution equation for the velocity gradient tensor  $m_{ab} \equiv \partial_a u_b$ :  $\frac{dm}{dt} + m^2 = H$ , where  $H$  is the pressure hessian, plus viscous corrections. Numerical observations [1, 16] indicate that the pressure term tends to diminish the nonlinear effect:  $H \sim \alpha m^2$ , where the parameter  $\alpha$  in Eq. 1 parametrizes the reduction of the nonlinearity. The incompressibility condition,  $Tr(M) = 0$  is satisfied, thanks to the  $\Pi Tr(M^2)$  term ( $Tr(\Pi) = 1$ , by construction). This choice of  $\Pi$  as a 'projection operator' to impose incompressibility is dictated by the fact that (i) the pressure term does do any work, as it should be the case in an incompressible flow, and (ii) in the deterministic case ( $\eta = 0$ ), the solutions of the system do not blow-up in a finite time. The stochastic term represents the effect of the rapidly fluctuating small scales on the pressure term. It is assumed to be gaussian, white in time, with a scaling form as a function of spatial scales compatible with Kolmogorov scaling. The dimensionless factor  $\gamma$  simply measures the intensity of this noise term.

The equation describing the evolution of the moment of inertia tensor (the 'geometry') of the set of points, Eq. 3, can be understood by decomposing the velocity field as an overall, shape preserving displacement, a straining flow, coherent over the scale  $\rho$  ( $Tr(g) = \rho^2$ ) of the object, and an incoherent, fluctuating component of the velocity field. Each of these three terms can be formally written by a filtering of the velocity field. The global displacement is ignored here, as we are considering an homogeneous flow. The straining term is responsible for the coupling between  $M$  and  $g$  in Eq. 3. One way to model the incoherent part of the velocity field over the set of points is to add a fluctuating, white in time noise term, as proposed in [1, 17]. The effect of such a term would be (i) to contribute to the overall growth of the object, and (ii) to counteract the tendency of the stretching term  $g \cdot M$  to generate very anisotropic shapes [17]. We have simply replaced the noise term by the  $\beta$ -term in Eq. 3. This term effectively tends to restore the isotropy of the geometry. This simplifies the search of solutions, as we will explain below.

To summarize, our model reduces to a set of stochastic differential equations. Besides the dimensional parameter  $\varepsilon$ , the rate of energy dissipation, it involves 3 dimensionless parameters :  $\alpha$ , the reduction of nonlinearity,  $\beta$ , the tendency for the small scale fluctuations to restore isotropy of the shape, and  $\gamma$ , the strength of the noise term in the  $M$  equation. One of the objectives of this work is to explore the qualitative solutions of the model in terms of these 3 parameters.

### III. DIAGNOSTICS

#### A. The $(R, Q)$ plane

Before presenting the results of the model, we explain in what way the velocity gradient tensor  $M$  enables a precise diagnostics of the flow topology. In the incompressible case, its three eigenvalues can be expressed as a function of the two invariants  $Q$  and  $R$  defined as:  $Q = -\frac{1}{2}\text{Tr}(M^2)$  and  $R = -\frac{1}{3}\text{Tr}(M^3)$  [15]. The local topology of the flow qualitatively depends on the sign of the discriminant  $D = 27R^2 + 4Q^3$ . Thus, for  $D > 0$ , two eigenvalues of  $M$  are complex conjugate: the flow is elliptic, with locally swirling streamlines. For  $D < 0$ , the three eigenvalues of  $M$  are real: in that case the flow is locally hyperbolic, and strain dominates. The zero discriminant line plays a crucial role in this diagram. It has been observed that in the case of the velocity derivative tensor,  $m$ , the probability distribution function is very skewed, and extends along the positive  $R$ -side of the zero discriminant line (PRZD-line) [15], a fact viewed as a qualitative signature of dynamical effects present in a very simplified model [18]. One of the main goals of this article is to compute the joint probability distribution function of the  $Q, R$  invariants as a function of scale. We stress that this quantity can be computed in Direct Numerical Simulations of turbulence, and is now accessible in experiments [14], suggesting challenging comparisons between theory and experiments.

#### B. DNS results

Before presenting the results of the model, we turned to numerical simulations to obtain detailed numerical information, for comparison purposes.

Briefly, we have used a standard pseudo spectral code, described in [19]. The run discussed here has a  $256^3$  resolution. We have made sure that the highest wavenumber in the simulation,  $k_{max}$ , is large enough to describe the smallest length scales in the flow :  $k_{max}\eta \geq 1.4$ . Our Reynolds number is  $R_\lambda = 130$ , and the ratio between the integral scale and  $\eta$  is  $L/\eta \sim 100$ . Because the end of the inertial range is at a scale  $\sim 10\eta$ , the inertial range in our simulation corresponds roughly to a factor 10 in scale.

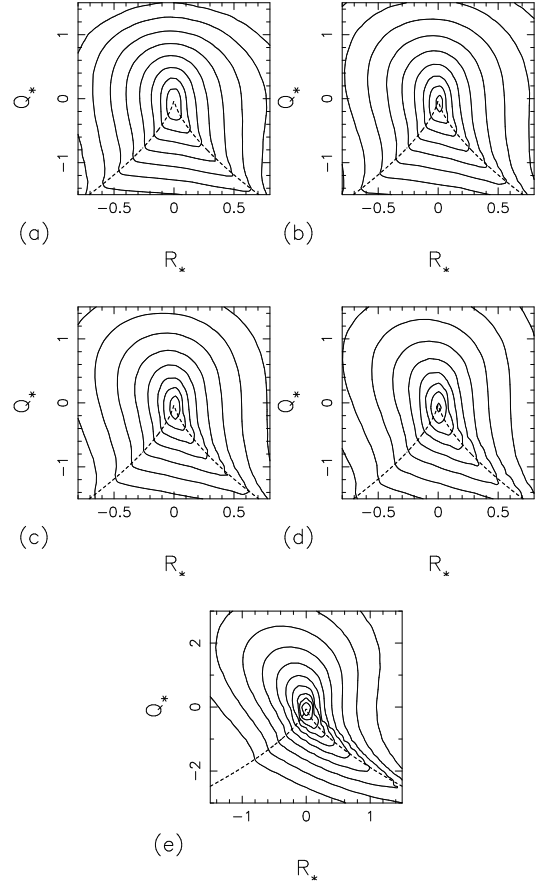


FIG. 1: PDF of  $Q_*, R_*$  invariants normalized to the variance of strain:  $Q_* = Q/\langle S^2 \rangle$ ,  $R_* = R/\langle S^2 \rangle^{3/2}$ , calculated by DNS; (a)  $r = L$ , (b)  $r = L/2$ , (c)  $r = L/4$ , (d)  $r = L/8$ , (e)  $r = 2\eta$ . The isoproability contours are logarithmically spaced, and separated by factors of  $\sqrt{10}$ .

Fig. 1 shows the joint probability distribution function in the  $(R, Q)$  plane, computed at different values of the scale,  $r$ , in the inertial range. At the integral scale,  $L$ , the distribution is almost symmetric with respect to the  $R = 0$  axis. As the value of  $r$  decreases, the distribution becomes stretched towards the  $R > 0$  part of the separatrix. It is worth noting that the asymmetry observed numerically is building up rather slowly as the scale  $r$  decreases. The probability distribution function of  $(R, Q)$  obtained when  $r$  is in the dissipative scale,  $r \sim \eta$ , is much more asymmetric than the one corresponding to inertial scales ( $r = L/8$ ). This leads us to the conclusion that the dissipative effects, not included in our model, are responsible for the significant increase of asymmetry of the probability distribution function in the  $(R, Q)$  plane, in particular of the large probability built up along the

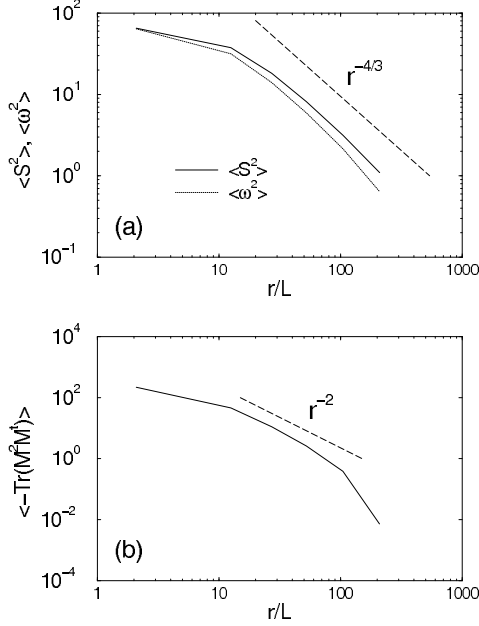


FIG. 2: Scaling laws of (a) the second moments of strain and vorticity, and (b) of the energy transfer divided by  $r^2$ , calculated by DNS.

PRZD-line. The probability distribution functions computed from our model should thus be compared with the ones shown in Fig. 1a-d, *not* with the one computed when  $r$  is in the dissipative range.

The energy transfer in an eulerian reference frame can be readily expressed with the help of our (lagrangian) model, Eq. (1-4). In the case of isotropic tetrahedra, this energy transfer reduces to :  $-\alpha r^2 \text{Tr}(M^2 M^t)$  [1, 20]. In the following, we will refer to the quantity  $-r^2 \text{Tr}(M^2 M^t)$  as the energy transfer.

Fig. 2 shows the scaling laws of the second moments of strain and vorticity, and of the energy transfer divided by  $r^2$ ,  $-\text{Tr}(M^2 M^t)$ . According to the Kolmogorov scaling  $\langle \Delta v(r) \rangle \propto r^{1/3}$ ,  $M(r)$  should evolve as  $r^{-2/3}$ , hence the second moments of the strain  $S$  (symmetric part of  $M$ ) and of the vorticity  $\omega$  (antisymmetric part of  $M$ ) should behave as  $r^{-4/3}$ , whereas the third moments like the quantity related to the energy transfer,  $-\text{Tr}(M^2 M^t)$ , should behave as  $r^{-2}$ . This is consistent with the fact that the energy transfer,  $-r^2 \text{Tr}(M^2 M^t)$ , is independant of  $r$  in the inertial range. Fig. 2 demonstrates that the

Kolmogorov's predictions correctly describe the low moments of  $M$ .

#### IV. METHOD OF RESOLUTION OF THE SYSTEM: PATH INTEGRAL REPRESENTATION AND SEMICLASSICAL APPROXIMATION

##### A. Path integral representation

The system (1-4) defines a well-posed stochastic problem. The solutions of the problem can be conveniently studied by noticing that the probability distribution function  $P(M, g, t)$  obeys a Fokker-Planck equation of the form :

$$\partial_t P(M, g, t) = LP(M, g, t) \quad (5)$$

where  $L$  is a differential operator. In this article we restrict ourselves to the simplest problem of statistically steady state turbulent flows, so we simply take  $\partial_t \rightarrow 0$ . The system thus reduces to a (parabolic) partial differential equation in the  $(g, M)$  variables:

$$LP = 0 \quad (6)$$

To solve this equation, one needs to specify the proper boundary conditions. At the largest scales of the flow, the velocity field has been shown many times to have a probability distribution function that is very close to a gaussian distribution. We use this property, and simply assume that at the integral scale,  $L$ , the probability distribution function of the matrix  $M$  is gaussian:

$$P(M, \text{Tr}(g) = 3L^2) \sim \exp \left[ -\frac{\text{Tr}(MM^t)}{(\varepsilon L^{-2})^{2/3}} \right] \quad (7)$$

The solution of the Fokker-Planck equation (6) can be considered as a eulerian probability distribution function provided that the following normalization condition is imposed:

$$\int dM P(M, g) = 1 \quad (8)$$

This system can be formally solved by using Green's function methods. The Green's function has an appealing path integral formulation, in terms of all the trajectories connecting the initial point,  $(M', g')$  at time  $-T$  to the final point  $(M, g)$  at time 0. One obtains [1]:

$$P(M, g) = \int dM' \int dT G_{-T}(M; g | M'; \text{Tr}(g') = 3L^2) \times P(M', \text{Tr}(g') = 3L^2) \quad (9)$$

$$G_{-T}(M; g|M'; g') = \int_{M(-T)=M'}^{M(0)=M} [\mathcal{D}M''] \int_{g(-T)=g'}^{g(0)=g} [\mathcal{D}g''] \exp[-S(M''; g'')] \quad (10)$$

$$P(M, g) = \int dM' \int dT \int_{M(-T)=M'}^{M(0)=M} [\mathcal{D}M''] \int_{g(-T)=g'}^{g(0)=g} [\mathcal{D}g''] \exp\left[-\left[S(M''; g'') + \text{Tr}(M' M'') / (\varepsilon L^{-2})^{2/3}\right]\right] \quad (11)$$

$$S = \int_0^T dt \frac{\left[\dot{M} + (1 - \alpha)(M^2 - \Pi \text{Tr} M^2)\right] \left[\dot{M} + (1 - \alpha)(M^2 - \Pi \text{Tr} M^2)\right]^t}{2\gamma\varepsilon/\rho^2} \quad (12)$$

The boundary condition (7) has been explicitly taken into account in Eq. 9-11. The probability distribution function  $P(M, g)$  is thus determined by considering all the trajectories starting at some time  $-T < 0$  with the condition that  $\text{Tr}(g') = 3L^2$ , and ending up at time  $= 0$  at  $(g, M)$ . The action,  $S$ , provides the statistical weight of each trajectory. A proper evaluation of the probability distribution function  $P(M, g)$  requires an integration over all the possible trajectories. This can be done in principle by using a Monte-Carlo algorithm. However, because of the large spatial dimension, the problem seems excessively difficult. A straightforward Monte-Carlo calculation leads to configurations that have widely different statistical weights (by many orders of magnitude !). Understanding the origin of the statistically significant contributions to the path integral in (11) is a prerequisite to carry out a reliable Monte-Carlo calculation of the solutions. The study of the semiclassical solutions presented in this article is the natural first step in such an endeavour.

A very simplified solution, consisting in ignoring completely the fluctuation term, was considered in [1]. The resulting 'classical approximation' leads to solutions that reproduce in a crude manner the main features of the solutions obtained in DNS of the Navier-Stokes equations at moderate resolution [1], and with experimental results [14].

### B. Semiclassical approximation

The semiclassical approximation is obtained by identifying the trajectory that maximizes the integrand in (11). Formally, this procedure is exact in the limit where the noise term becomes small :  $\gamma \rightarrow 0$ . In this approximation, one simply replaces in (11) the integral by the saddle point value, obtained by substituting the 'optimal trajectory' into the action term:

$$P(M, g) \sim \exp\left(-\left[S_c(M; g|M'; g') + \frac{\text{Tr}(M' M'')}{(\varepsilon L^{-2})^{2/3}}\right]\right) \quad (13)$$

The determination of the optimal trajectory can be carried out by writing the appropriate Euler-Lagrange variational equation :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{M}_{ab}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_{ab}} \quad (14)$$

where  $\mathcal{L}$  is the Lagrangian of the system ( $S = \int dt \mathcal{L}$ ). Its expression is given in (12).

In our calculations, aimed at determining the probability distributions in the  $(R, Q)$  plane as a function of scale, the Euler-Lagrange equation (14) requires a number of a-priori unknown boundary conditions. Specifically, imposing  $(R, Q)$  at scale  $r$  leaves 3 unknown free parameters to completely determine the matrix  $M$ . In addition, the time derivative of  $M$ ,  $\dot{M}$  is a-priori unknown, which leaves in addition 8 parameters (incompressibility imposes that  $\text{Tr}(\dot{M}) = 0$ ), leaving a 11-dimensional space to fully determine the initial condition. For each value of  $(R, Q)$ , our approach consists in computing the logarithm of the probability distribution in Eq. 13 as a function of the 11 other parameters, and look for its maximum.

### C. Optimization methods

Our first attempt to solve the optimization problem in the 11-dimensional space of initial conditions was based on the simplex method 'amoeba', which is known to converge when the function to be minimized has simple convexity properties [21]. In the problem considered here, however, the function to be optimized turns out to have a much more complicated structure, so the 'amoeba' converged towards one of the (many) local minima of the function, but never to the searched global minimum. This difficulty can be tackled by using a combination of the simplex algorithm, and of simulated annealing techniques. The algorithm 'amebsa' [21] was used in our work. The procedure we employed is the following: for each value of  $(Q, R, r)$  ( $r$  being the scale), an initial regular simplex of characteristic size 0.2 is considered. This

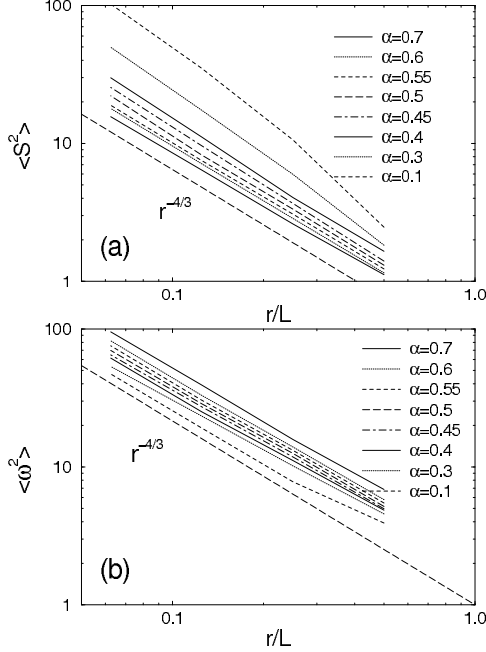


FIG. 3: Scaling laws of the second moments of (a) strain and (b) vorticity, for different values of  $\alpha$  ( $\beta=0.4$ ,  $\gamma=0.25$ ). Aside from the straight line  $r^{-4/3}$ ,  $\alpha=0.7, 0.6, 0.55, 0.5, 0.45, 0.4, 0.3, 0.1$  from bottom to top in (a) and from top to bottom in (b).

object undergoes a first annealing, whose initial temperature is equal to 7, then two others, whose initial temperatures equal  $yb/4$ ,  $yb$  being the optimal value of the function obtained in the previous annealing. In these three annealings, the temperature is decreased quadratically, and for 10 regularly spaced values of it the amoeba algorithm is iterated 300 times. In the calculations performed here, the algorithm considers that a local minimum has been found when the relative difference between the largest and the smallest values of the function over the simplex is less than  $10^{-3}$ .

## V. RESULTS AND DISCUSSION OF THE SEMICLASSICAL CALCULATIONS

The method described in the previous section to compute the 'semiclassical' solutions of the model leads to a numerically tractable algorithm, that allows us to study the behavior of the solutions as a function of the three parameters,  $\alpha$  (the reduction of nonlinearity),  $\beta$  (the isotropizing effect of the small scale velocity fluctuations) and  $\gamma$  (the amplitude of the noise acting on  $M$ ). The DNS results, discussed in section III B, provide a natural point of comparison to discuss our data.

Our main finding in this section is that the parameter  $\alpha$  plays the most significant role in determining the qualitative feature of the solution. Imposing that the solution exhibits the right behavior for the moments of the vorticity, the strain, and the energy transfer, as well as for the probability distribution function considerably restricts the value of  $\alpha$ .

### A. Scaling properties

We discuss first the scaling properties of quantities such as the square of the strain,  $\langle S^2 \rangle$  and of the vorticity,  $\langle \omega^2 \rangle$ , as well as of the energy transfer term,  $\langle -r^2 \text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$ .

Fig. 3 shows the dependence of  $\langle S^2 \rangle$  and  $\langle \omega^2 \rangle$  as a function of scale for several values of  $\alpha$ , at fixed values of  $\beta$  and  $\gamma$  ( $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.25$ ). The general aspect of the curves shown in Fig. 3 is essentially independent of the precise values of  $\beta$  and  $\gamma$ . The expected scaling law dependence,  $r^{-4/3}$ , of  $\langle \omega^2 \rangle$  is correctly observed for all the values of  $\alpha$ . But the quantity that is the most sensitive to the value of  $\alpha$  is  $\langle S^2 \rangle$ . The fit of the dependence of  $\langle S^2 \rangle$  as a function of  $r$  by a power law shows a good agreement with the  $-4/3$  exponent for  $\alpha \sim 0.5$ ,

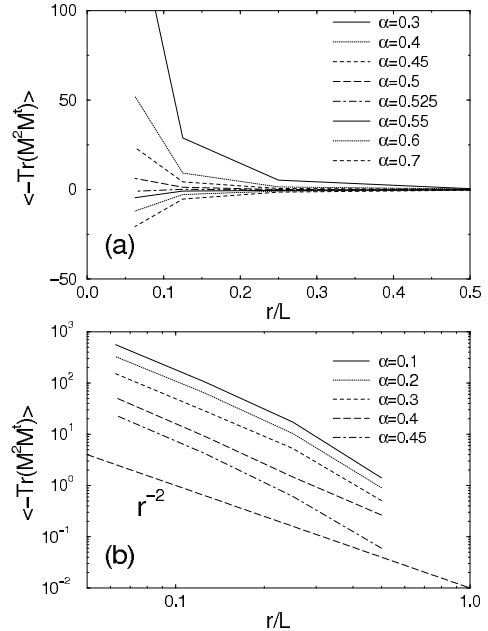


FIG. 4: The energy transfer divided by  $r^2$ ,  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  as a function of scale  $r$  for different values of  $\alpha$  ( $\beta=0.4$ ,  $\gamma=0.25$ ): (a) linear scale, (b) logarithmic scale. For large values of  $\alpha$  this quantity is negative.

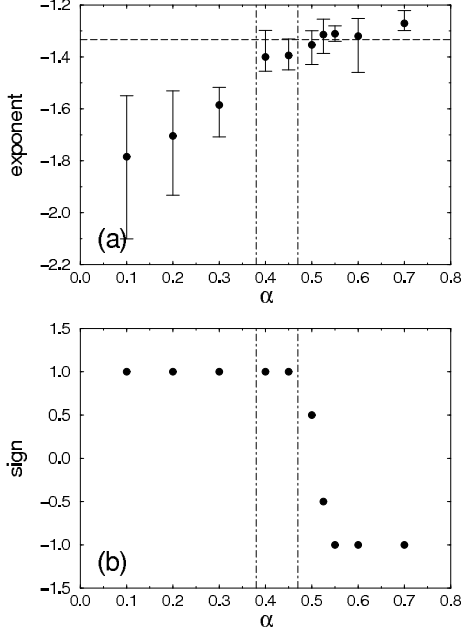


FIG. 5: Dependence with respect to  $\alpha$  of (a) the scaling law exponent of  $\langle S^2 \rangle$  and (b) the sign of the energy transfer  $\langle -r^2 \text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  ( $\beta=0.4$ ,  $\gamma=0.25$ ). In (a) the dashed line indicates the Kolmogorov prediction  $-4/3$ . In (b) is plotted for each value of  $\alpha$  the average of the sign of the energy transfer at the different scales considered. The range of values of  $\alpha$  leading to a qualitatively acceptable behavior of the model's solutions is delimited by the vertical dot-dashed lines.

but significant deviations from it for other values of  $\alpha$  (see Fig. 5a). This suggests that the semiclassical solutions of the model can only be compatible with the DNS data provided the value of  $\alpha$  is large enough :  $\alpha \gtrsim 0.4$ .

Fig. 4 shows the dependence of the energy transfer term divided by  $r^2$ ,  $\langle -\text{Tr}(M^2 M^t) \rangle$  as a function of  $r$  at a fixed value of  $\beta$  and  $\gamma$  ( $\beta = 0.4$  and  $\gamma = 0.25$ ), and for various values of  $\alpha$ . As it was the case for the quadratic quantities,  $\langle S^2 \rangle$  and  $\langle \omega^2 \rangle$ , we found that the qualitative behavior shown in Fig. 4 is fairly independent of the precise values of  $\beta$  and  $\gamma$ . The main observation is that the value of the transfer has the correct sign:  $\langle -r^2 \text{Tr}(M^2 M^t) \rangle > 0$  provided the value of  $\alpha$  is small enough:  $\alpha \lesssim 0.5$  (see Fig. 5b). For values of  $\alpha$  in this range, we find that the energy transfer scales with the proper scale dependence, as seen in DNS. For certain values of  $\alpha$ , the energy transfer is negative at large scales and positive at small scales: in this case we have plotted in Fig. 5b the average of the sign at the different scales considered. Fig. 5 leads to the conclusion that the range of values of  $\alpha$  that lead to a good qualitative agreement with the DNS results is strongly constrained : only val-

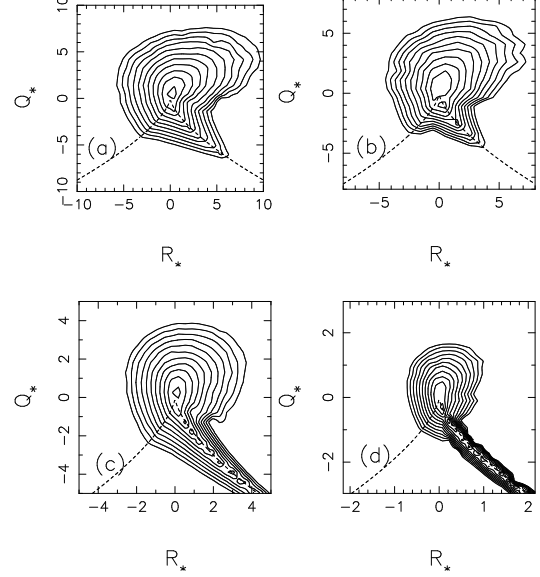


FIG. 6: PDF of  $Q^*, R^*$  invariants normalized to the variance of strain, for (a) and (b)  $\alpha=0.6$ , (c) and (d)  $\alpha=0.2$ . (a) and (c)  $r = L/2$ , (b) and (d)  $r = L/16$ ;  $\beta=0.4$  and  $\gamma=0.25$ . The isoproability contours are logarithmically spaced, and separated by factors of  $\sqrt{10}$ .

ues of  $\alpha$  close to 0.45 ( $0.4 \lesssim \alpha \lesssim 0.5$ ) produce results qualitatively comparable to our DNS results.

### B. Evolution of the probability distribution function in the $(R, Q)$ plane

The fact that the value of  $\alpha$  needed to obtain the right scaling of energy transfer, strain and vorticity from the solutions of our model has to be rather precisely tuned can be also seen by studying the computed probability distribution functions in the  $(R, Q)$  plane. Fig. 6a,b (6c,d) show the probability distribution function at a large (small) value of  $\alpha$ :  $\alpha = 0.6$  ( $\alpha = 0.2$ ), at two values of  $r$ :  $r = L/2$  and  $r = L/16$ . The main difference between the evolution at the value  $\alpha = 0.6$  (Fig. 6a,b) and at the low value  $\alpha = 0.2$  (Fig. 6c,d) concerns the growth of the probability distribution along the PRZD-line (the zero discriminant line is shown in dashed in Fig. 6 and 7). At small values of  $\alpha$ , Fig. 6c,d, the tail along the PRZD-line grows considerably when the scale  $r$  decreases, significantly more than what is observed in DNS. In the other case (higher values of  $\alpha$ , Fig. 6a,b) the growth of probability along the PRZD-line is not observed at all: in fact, the probability tends to grow more in other parts of the  $(R, Q)$ -plane.

Fig. 7 shows the density of strain (7a), vorticity (7b) and energy flux (7c) in the  $(R, Q)$  plane at the value  $\alpha =$



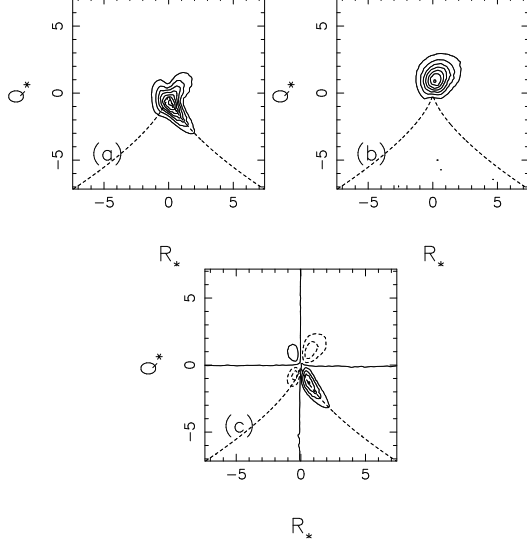


FIG. 7: (a) Strain variance, (b) enstrophy and (c) energy flux densities in the  $R_*, Q_*$  plane, for  $r = L/8$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=0.4$  and  $\gamma=0.25$ . Solid lines correspond to positive values, dashed lines to negative ones.

0.5, and with  $\beta = 0.4$  and  $\gamma = 0.25$ , at a value of  $r = L/8$ . Generally, the trends are consistent with the DNS results [1], except perhaps for the density of strain, that tends to be less concentrated around the origin compared to the DNS. Overall, the main conclusion is that the parameter  $\alpha$ , which controls the reduction of the nonlinearity, has a very strong influence on the growth of the probability distribution along the PRZD-line: the smaller  $\alpha$ , i.e., the stronger the nonlinear term is, the larger the tail of the probability distribution function along the PRZD-line.

### C. Discussion

The growth of the PDF tail along the PRZD-line predicted by the model for small values of  $\alpha$  is generally consistent with the results of [14]. In this work, it was noticed that the small scales of the flow tend to slow down the effect of the nonlinearity, estimated at the given scale. This is precisely the origin of the  $\alpha$ -term in our model [1]. A large enough value of the parameter  $\alpha$  is needed to sufficiently reduce the growth of the probability along the PRZD-line as  $r$  decreases, consistent with the model's results.

The fact that the strain density is large in the neighborhood of the PRZD-line, and that the tail seems to grow very strongly when  $\alpha$  decreases is consistent with the fact that the strain  $\langle S^2 \rangle$  grows faster when  $r$  decreases at small values of  $\alpha$ . The energy transfer is positive near this neighborhood, which explains why the value of  $\alpha$

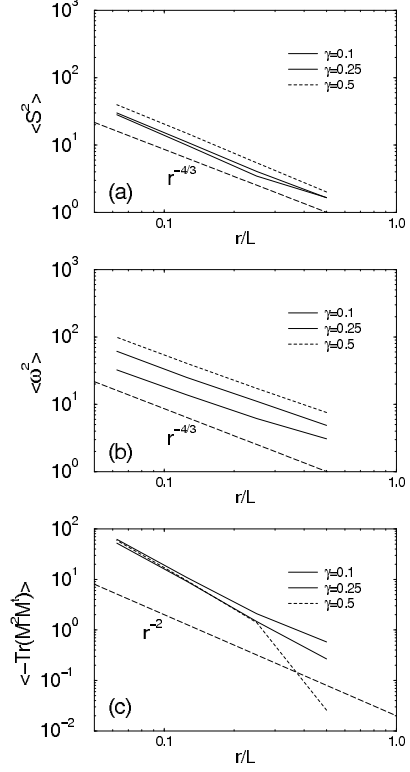


FIG. 8: Scaling laws of the second moments of (a) strain and (b) vorticity, and (c) of the energy transfer divided by  $r^2$ , for different values of  $\gamma$  ( $\alpha=0.4$ ,  $\beta=0.4$ ).

needs to be small enough to have the appropriate sign of the energy transfer. Too large a value of  $\alpha$  leads to a too small contribution from the tail along the PRZD-line, and to an improper sign of the energy transfer; whereas too small a value of  $\alpha$  leads to an excessive growth of the strain  $\langle S^2 \rangle$  at smaller scales (see Fig. 5). The enstrophy density, which is concentrated in the upper part of the  $(R, Q)$  plane, is not influenced by the tail along the PRZD-line, which is consistent with the fact that the dependance of  $\langle \omega^2 \rangle$  with respect to  $\alpha$  is much weaker.

We insist on the fact that the general picture we have illustrated here for a particular set of values of  $\beta$  and  $\gamma$  does not depend, qualitatively, on the precise value of  $\beta$  and  $\gamma$  chosen. In fact, the precise value of  $\beta$  plays almost no role, provided  $\beta$  is not very small. The strength of the noise, measured by the value of  $\gamma$ , plays a stronger role, although it does not affect in a significant way neither the 'transition' we observed, nor in fact the precise value of  $\alpha$  for which the transition occurs. As an example, Fig. 8 shows the dependence of the mean values of  $S^2$ ,  $\omega^2$  and  $-Tr(M^2 M^t)$  as a function of  $r$  for several values of  $\gamma$ , at fixed  $\alpha$  and  $\beta$ .

Although the semiclassical solutions computed here reproduce qualitatively many features observed in the DNS and in experiments, they also show a number of inappropriate features. The most visible example, as one compares the probability distribution functions obtained from DNS and from the semiclassical solution concerns the anomalously large probability predicted in the  $R > 0, Q > 0$  sector of the  $(R, Q)$  plane. This aspect of the semiclassical solutions is in quantitative disagreement with the solutions obtained by DNS, or observed experimentally.

## VI. CONCLUSION

We have considered a model that aims at predicting the statistical properties of the coarse-grained velocity gradient tensor,  $M$ , as a function of the spatial scale,  $r$ . This model includes in an essential way many qualitative important features identified in turbulent flows. The model is formulated as a set of stochastic differential equations, and involves in the form considered here 3 dimensionless parameters:  $\alpha$ , the strength of the nonlinearity reduction,  $\beta$ , the amplitude of the term that restores isotropy of the tetrad, and  $\gamma$ , the amplitude of the noise term in the  $M$ -equation. Although it is relatively easy from a technical point of view to write a formal solution in terms of path integrals, that can lead in principle to a numerical (Monte-Carlo) treatment, we had to content ourselves as a first step with a semiclassical treatment, which amounts to find the largest contribution to the path integral solution of the model.

From a turbulence point of view, we have observed in DNS that the probability distribution function in the  $(R, Q)$  plane when the coarse-graining scale  $r$  is in the inertial range develops an asymmetry towards the  $R > 0$  part of the separatrix relatively slowly. The very skewed probability distribution functions observed in the inertial range are mostly due to a viscous (dissipative) effect, not included in our model.

Comparing the results of our model, both in terms of probability distribution function shape in the  $(R, Q)$

plane, as well as in terms of low order moments, such as  $\langle S^2 \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$  and  $\langle -Tr(M^2 M^t) \rangle$  (the energy transfer term divided by  $r^2$ ), leads to important constraints on the possible values of the parameters of the model. The parameter that was found to play the most crucial role is  $\alpha$ , which parameterizes the reduction of the nonlinearity in the model. The main effect of  $\alpha$  is to modify the growth of the probability tail, along the separatrix. The behavior predicted by the model is in qualitative agreement with the (moderate) growth of the probability tail observed in the inertial range in DNS only for a limited range of  $\alpha$ :  $\alpha \sim 0.45$ . We note that this value of  $\alpha$  is not inconsistent with the values of  $\alpha$  reported in the past [1, 16]. In contrast, the other parameters,  $\beta$  and  $\gamma$ , do not appear to modify very significantly the qualitative behavior of the solution, unless they are extremely small ( $\beta$ ) or too large ( $\gamma$ ).

Although the semiclassical solutions of the model reproduce in several essential ways the probability distribution function in the  $(R, Q)$  plane obtained by DNS, they lead to a number of quantitative incorrect features. The main example is the enhanced probability distribution in the  $R > 0, Q > 0$  quadrant. The method of resolution (semiclassical) discussed here should ultimately be improved. It is our belief that the knowledge gained in obtaining semiclassical solutions should help us in designing better approximations schemes. Preliminary results in this direction are encouraging.

We also note that the model can be extended to study flows with more complicated large scale structures, such as shear [22] or contractions [23], by simply modifying the large scale boundary condition. Such detailed comparisons will provide stringent tests on the validity of our approach.

We acknowledge many fruitful discussions with M. Chertkov and B. Shraiman. This work has been supported by the European Commission (contract HPRN-CT-2002-00300). We acknowledge the support of IDRIS for computer time. We also acknowledge the Center for NonLinear Studies, where part of this work has been done.

- 
- [1] M. Chertkov, A. Pumir, and B. I. Shraiman, *Phys. Fluids* **11**, 2394 (1999).
  - [2] A. N. Kolmogorov, *C. R. Acad. Sci. USSR* **30**, 301 (1941).
  - [3] U. Frisch, *Turbulence: The legacy of AN Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
  - [4] G. Falkovich, K. Gawedzki, and M. Vergassola, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 913 (2001).
  - [5] R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
  - [6] B. I. Shraiman and E. D. Siggia, *C. R. Acad. Ser. II* **321**, 279 (1995).
  - [7] L. Mydlarski, A. Pumir, B. I. Shraiman, E. D. Siggia, and Z. Warhaft, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4373 (1998).
  - [8] A. Celani and M. Vergassola, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 424 (2001).
  - [9] E. Siggia, *J. Fluid Mech.* **107**, 375 (1981).
  - [10] S. Douady, Y. Couder, and M. E. Brachet, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 983 (1991).
  - [11] J. Jimenez, A. Wray, P. Saffman, and R. Rogallo, *J. Fluid Mech.* **255**, 65 (1993).
  - [12] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1967).
  - [13] S. Chen, R. E. Ecke, G. L. Eyink, X. Wang, and Z. Xiao, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 214501 (2003).
  - [14] F. Van der Bos, B. Tao, C. Meneveau, and J. Katz, *Phys. Fluids* **14**, 2456 (2002).
  - [15] B. J. Cantwell, *Phys. Fluids A* **4**, 782 (1992).

- [16] V. Borue and S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **366**, 1 (1998).
- [17] A. Pumir, B. I. Shraiman, and M. Chertkov, Phys. Rev. Lett. **85**, 5324 (2000).
- [18] P. Vieillefosse, Physica **125A**, 150 (1984).
- [19] A. Pumir, Phys. Fluids **6**, 2071 (1994).
- [20] A. Pumir, B. I. Shraiman, and M. Chertkov, Europhys. Lett. **56**, 379 (2001).
- [21] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [22] X. Shen and Z. Warhaft, Phys. Fluids **12**, 2976 (2000).
- [23] Z. Warhaft, private communication (2005).

## Références



# Bibliographie

- [1] P. Manneville, *Structures dissipatives, Chaos et Turbulence*, CEA éd. (1991).
- [2] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, New-York (1960).
- [3] L.D. Landau, *On the problem of turbulence*, C.R. Acad. Sci. URSS **44**, 311 (1944).
- [4] D. Ruelle et F. Takens, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20**, 167 (1971).
- [5] U. Frisch, *Turbulence : The legacy of AN Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [6] K. Kaneko, *Spatiotemporal intermittency in coupled map lattices*, Prog. Theor. Phys. **74**, 1033 (1985).
- [7] M. Chertkov, A. Pumir et B.I. Shraiman, *Lagrangian tetrad dynamics and the phenomenology of turbulence*, Phys. Fluids **11**, 2394-2410 (1999).
- [8] F. Van der Bos, B. Tao, C. Meneveau et J. Katz, *Effects of small-scale turbulent motions on the filtered velocity gradient tensor as deduced from holographic particle image velocimetry measurements*, Phys. Fluids **14**, 2456-2474 (2002).
- [9] C. Pirat, C. Mathis, P. Maïssa et L. Gil, *Structures of a continuously fed two-dimensional viscous film under a destabilizing gravitational force*, Phys. Rev. Lett. **92**, 104501 (2004).
- [10] H. Chaté et P. Manneville, *Spatiotemporal intermittency in coupled map lattices*, Physica (Amsterdam) **32D**, 409 (1988).
- [11] N. Mordant, P. Metz, O. Michel et J.F. Pinton, *Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett. **87**, 214501 (2001).
- [12] A. La Porta, G.A. Voth, A.M. Crawford, J. Alexander et E. Bodenschatz, *Fluid particle accelerations in fully developed turbulence*, Nature **409**, 1017 (2001).
- [13] P.K. Yeung, D.A. Donzis et K.R. Sreenivasan, *High-Reynolds-number simulation of turbulent mixing*, Phys. Fluids **17**, 081703 (2005).
- [14] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B.J. Devenish, A. Lanotte et F. Toschi, *Multifractal statistics of lagrangian velocity and acceleration in turbulence*, Phys. Rev. Lett. **93**, 064502 (2004).

- [15] B.I. Shraiman et E.D. Siggia, *Scalar turbulence*, Nature **405**, 639 (2000).
- [16] G. Falkovich, K. Gawedzki et M. Vergassola, *Particles and fields in fluid turbulence*, Rev. Mod. Phys. **73**, 913 (2001).
- [17] A.N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, C. R. Acad. Sci. USSR **30**, 301 (1941).
- [18] S. Douady, Y. Couder et M.E. Brachet, *Direct observation of intense vortex filaments in turbulence*, Phys. Rev. Lett. **67**, 983 (1991).
- [19] E.D. Siggia, *Numerical study of intermittency in three-dimensional turbulence*, J. Fluid Mech. **107**, 375 (1981).
- [20] J. Jimenez, A. Wray, P. Saffman et R. Rogallo, *The structure of intense vorticity in homogeneous isotropic turbulence*, J. Fluid Mech. **225**, 65 (1993).
- [21] L. Mydlarski, A. Pumir, B.I. Shraiman, E.D. Siggia et Z. Warhaft}, *Structures and multipoint correlators for turbulent advection : predictions and experiments*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4373 (1998).
- [22] A. Celani et M. Vergassola, *Statistical geometry in scalar turbulence*, Phys. Rev. Lett. **86**, 424 (2001).
- [23] A. Pumir, B.I. Shraiman et M. Chertkov, *The lagrangian view of energy transfer in turbulent flow*, Europhys. Lett. **56**, 379 (2001).
- [24] A. Pumir et B.I. Shraiman, *Lagrangian particle approach to Large Eddy Simulations of hydrodynamic turbulence*, J. Stat. Phys. **113**, 693 (2003).
- [25] M. Chertkov, A. Pumir et B.I. Shraiman, *Statistical geometry and lagrangian dynamics of turbulence*, in *Intermittency in turbulent flows*, édité par C. Vassilicos, Cambridge University Press, 243-261 (2001).
- [26] V. Borue et S.A. Orszag, *Local energy flux and subgrid scale statistics in three-dimensional turbulence*, J. Fluid Mech. **366**, 1 (1998).
- [27] B.I. Shraiman et E.D. Siggia, *Lagrangian path integrals and fluctuations in random flow*, Phys. Rev. E **49**, 2912 (1994).
- [28] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 408-412 (1992).
- [29] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 451-455 (1992).
- [30] M.E. Brachet, *Géométrie des structures à petite échelle dans le vortex de Taylor-Green*, C.R. Acad. Sci. Paris **311**, 775 (1990).
- [31] A.S. Monin et A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge (1975).
- [32] S.G. Saddoughi et S.V. Veeravalli, *Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number*, J. Fluid Mech. **268**, 333 (1994).

- [33] A. Pumir et B. I. Shraiman, *Persistent small scale anisotropy in homogeneous shear flows*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3114 (1995).
- [34] A. Pumir, *Turbulence in homogeneous shear flows*, Phys. Fluids **8**, 3112 (1996).
- [35] X. Shen et Z. Warhaft, *The anisotropy of the small scale structure in high Reynolds number ( $R_\lambda \sim 1000$ ) turbulent shear flow*, Phys. Fluids **12**, 2976 (2000).
- [36] J. Schumacher, K.R. Sreenivasan et P.K. Yeung, *Derivative moments in turbulent shear flows*, Phys. Fluids **15**, 84 (2003).
- [37] I. Arad, V. L'vov et I. Procaccia, *Correlation functions in isotropic and anisotropic turbulence : the role of the symmetry group*, Phys. Rev. E **59**, 6753 (1999).
- [38] L. Biferale et M. Vergassola, *Isotropy vs anisotropy in small-scale turbulence*, Phys. Fluids **13**, 2139 (2001).
- [39] L. Biferale et I. Procaccia, *Anisotropy in turbulent flows and in turbulent transport*, Phys. Reports **414**, 43 (2005).
- [40] S. Kida et M. Tanaka, *Dynamics of vortical structures in a homogeneous shear flow*, J. Fluid Mech. **274**, 43 (1994).
- [41] S. Ayyalasomayajula et Z. Warhaft, *Nonlinear interactions in strained axisymmetric high Reynolds number turbulence*, soumis à J. Fluid Mech. (2005).
- [42] C. Morize, F. Moisy et M. Rabaud, *Decaying grid-generated turbulence in a rotating tank*, Phys. Fluids **17**, 095105 (2005).
- [43] M. Chertkov, *Phenomenology of Rayleigh-Taylor turbulence*, Phys. Rev. Lett. **91**, 115001 (2003).
- [44] M. Chertkov, I. Kolokolov et V. Lebedev, *Effects of surface tension on immiscible Rayleigh-Taylor turbulence*, Phys. Rev. E **71**, 055301 (2005).
- [45] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L'espace chaotique*, éd. Hermann (1998).
- [46] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L'ordre dans le chaos*, éd. Hermann (1988).
- [47] M.J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of non-linear transformations*, J. Stat. Phys. **19**, 25 (1978).
- [48] C. Tresser et P. Coullet, *Itérations d'endomorphisme et groupe de renormalisation*, C.R. Acad. Sci. Paris **A287**, 577 (1978).
- [49] Y. Pomeau et P. Manneville, *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*, Comm. Math. Phys. **74**, 189 (1980).
- [50] H. Chaté et P. Manneville, *Spatiotemporal Intermittency*, in *Turbulence : A Tentative Dictionary*, édité par P. Tabellin et O. Cardoso, Plenum Press, 111-116 (New York, 1995).
- [51] H. Chaté et F. Daviaud, *Spatiotemporal intermittency*, in *New approaches to the description and the modeling of turbulence*, Von Karman Institute (1991).



- [52] Y. Pomeau, *Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics*, Physica D **23**, 3 (1986).
- [53] H. Hinrichsen, *Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing States*, Adv. Phys. **49**, 815 (2000).
- [54] G. Rousseau, *Systèmes dynamiques sur réseau : applications au milieu interstellaire et à la transition vers la turbulence*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris VII (1998).
- [55] H. Chaté et P. Manneville, *Transition to turbulence via spatio-temporal intermittency*, Phys. Rev. Lett. **58**, 112 (1987).
- [56] H. Chaté et P. Manneville, *Continuous and discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in two-dimensional coupled map lattices*, Europhys. Lett. **6**, 591 (1988).
- [57] H. Chaté et P. Manneville, *Role of defects in the transition to turbulence via spatiotemporal intermittency*, Physica (Amsterdam) **37D**, 33 (1989).
- [58] F. Daviaud, M. Dubois et P. Bergé, *Spatio-temporal intermittency in quasi one-dimensional Rayleigh-Bénard convection*, Europhys. Lett. **9**, 441 (1989).
- [59] F. Daviaud, M. Bonetti et M. Dubois, *Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency in one-dimensional Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. A **42**, 3388 (1990).
- [60] F. Daviaud, J. Lega, P. Bergé, P. Couillet et M. Dubois, *Spatio-temporal intermittency in a 1D convective pattern : Theoretical model and experiments*, Physica D **55**, 287 (1992).
- [61] M. Caponeri et S. Ciliberto, *Thermodynamic aspects of the transition to spatiotemporal chaos*, Physica D **58**, 365 (1992).
- [62] M. Rabaud, S. Michalland et Y. Couder, *Dynamical regimes of directional viscous fingering : spatiotemporal chaos and wave propagation*, Phys. Rev. Lett. **64**, 184 (1990).
- [63] S. Michalland, M. Rabaud et Y. Couder, *Transition to Chaos by spatio-temporal intermittency in Directional Viscous Fingering*, Europhys. Lett. **22**, 17 (1993).
- [64] H. Willaime, O. Cardoso et P. Tabeling, *Spatiotemporal intermittency in lines of vortices*, Phys. Rev. E **48**, 288 (1993).
- [65] M.M. Degen, I. Mutabazi et C.D. Andereck, *Transition to weak turbulence via spatiotemporal intermittency in the Taylor-Dean system*, Phys. Rev. E **53**, 3495 (1996).
- [66] P.W. Colovas et C.D. Andereck, *Turbulent bursting and spatiotemporal intermittency in the counterrotating Taylor-Couette system*, Phys. Rev. E **55**, 2736 (1997).
- [67] S. Bottin, O. Dauchot et F. Daviaud, *Intermittency in a Locally Forced Plane Couette Flow*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4377 (1997).

- [68] S. Bottin, F. Daviaud, P. Manneville et O. Dauchot, *Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow*, Europhys. Lett. **43**, 171 (1998).
- [69] D.P. Vallette, G. Jacobs et J.P. Gollub, *Oscillations and spatiotemporal chaos of one-dimensional fluid fronts*, Phys. Rev. E **55**, 4274 (1997).
- [70] P. Rupp, R. Richter et I. Rehberg, *Critical exponents of directed percolation measured in spatiotemporal intermittency*, Phys. Rev. E **67**, 036209 (2003).
- [71] C. Pirat, A. Naso, J.-L. Meunier, P. Maïssa et C. Mathis, *Transition to spatiotemporal chaos in a two-dimensional hydrodynamic system*, Phys. Rev. Lett. **94**, 134502 (2005).
- [72] C. Pirat, *Structures d'un film visqueux bidimensionnel continûment alimenté sous gravité déstabilisante*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice Sophia Antipolis (2004).
- [73] F. Giorgiutti, A. Bleton, L. Limat et J.E. Wesfreid, *Dynamics of a one-dimensional array of liquid columns*, Phys. Rev. Lett. **74**, 538 (1995).
- [74] M. Fermigier, L. Limat, J.E. Wesfreid, P. Boudinet et C. Quilliet, *Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer*, J. Fluid Mech. **236**, 349 (1992).
- [75] Lord Rayleigh, *Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density*, Proc. Lond. Math. Soc. **14**, 170 (1883).
- [76] G.I. Taylor, *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes*, Proc. Roy. Soc. Lon. **A201**, 192 (1950).
- [77] D. Sharp, *An overview of Rayleigh-Taylor instability*, Physica (Amsterdam) **12D**, 3 (1984).
- [78] [http ://www.inln.cnrs.fr/~pirat](http://www.inln.cnrs.fr/~pirat).
- [79] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars et O. Schwarzkopf, Springer-Verlag (1997).
- [80] L. Gil, J. Lega et J.-L. Meunier, *Statistical proprieties of defect-mediated turbulence*, Phys. Rev. A **41**, 1138 (1990).
- [81] K.E. Daniels et E. Bodenschatz, *Defect Turbulence in Inclined Layer Convection*, Phys. Rev. Lett. **88**, 034501 (2002).
- [82] J.-L. Féménias, *Probabilités et statistique pour les sciences physiques*, éd. Dunod (2003).
- [83] B.J. Cantwell, *Exact solution of a restricted Euler equation for the velocity gradient tensor*, Phys. Fluids A **4**, 782-793 (1992).
- [84] P. Vieillefosse, *Local interaction between vorticity and shear in a perfect incompressible fluid*, J. Phys. (Paris) **43**, 837 (1982).
- [85] P. Vieillefosse, *Internal motion of a small element of a fluid in inviscid flow*, Physica **125A**, 150-162 (1984).

- [86] W. Ashurst, A. Kerstein, R. Kerr et C. Gibson, *Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence*, Phys. Fluids **30**, 2343 (1987).
- [87] B.J. Cantwell, *On the behavior of the velocity gradient tensor invariants in DNS of turbulence*, Phys. Fluids A **5**, 2008 (1993).
- [88] H. Blackburn, N. Mansour et B.J. Cantwell, *Topology of fine-scale motions in turbulent channel flow*, J. Fluid Mech. **310**, 269 (1996).
- [89] A. Pumir, *A numerical study of pressure fluctuations in three-dimensional, incompressible, homogeneous, isotropic turbulence*, Phys. Fluids **6**, 2071 (1994).
- [90] A. Naso et A. Pumir, *Scale dependence of the coarse-grained velocity derivative tensor structure in turbulence*, accepté dans Phys. Rev. E (2005).
- [91] A. Pumir, communication privée.
- [92] J.A. Nelder et R. Mead, Computer Journal **7**, 308-313 (1965).
- [93] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi, *Optimization by simulated annealing*, Science **220**, 671-680 (1982).
- [94] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 444-445 (1992).
- [95] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller et E. Teller, *Equation of state calculations by fast computing machines*, J. Chem. Phys. **21**, 1087-1092 (1953).



**Résumé :** Cette thèse se compose de deux parties. Dans la première est étudié un modèle de turbulence hydrodynamique se présentant sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques. On présente dans un premier temps les solutions de ce système calculées dans l'approximation semi-classique, puis celles obtenues par une méthode de type Monte-Carlo adaptée au problème, dans le cas où le forçage est supposé statistiquement homogène et isotrope. Ces solutions présentent un bon accord avec des résultats d'expériences et de simulations numériques directes de l'équation de Navier-Stokes. Dans un second temps sont présentées les solutions du système lorsqu'un cisaillement est appliqué à l'écoulement.

La seconde partie est consacrée à l'étude de la transition au chaos spatio-temporel par intermittence dans un système hydrodynamique réel. Cette transition est d'abord étudiée quantitativement, puis un modèle d'intermittence spatio-temporelle est appliqué aux conditions aux limites de l'expérience. Comme le système réel, les solutions de ce modèle présentent pour certaines valeurs des paramètres dont il dépend un régime de bistabilité, près du seuil, entre l'intermittence spatio-temporelle et un régime où le désordre n'est présent que sur les bords.

**Mots clés :** Turbulence hydrodynamique, Approche lagrangienne, Modèle stochastique, Approximation semi-classique, Turbulence sous cisaillement, Intermittence spatio-temporelle, Transition au chaos spatio-temporel, Réseaux d'itérations couplées, Instabilité de Rayleigh-Taylor

---

## Intermittency in fully developed turbulence and in nonlinear dynamics

---

**Abstract :** This thesis is divided into two parts. In the first one is studied a model of hydrodynamic turbulence which consists of a set of stochastic differential equations. At first, one presents the solutions of this system calculated in the semiclassical approximation, then those obtained through a Monte-Carlo-type method adapted to the problem, in the case where the forcing is supposed to be statistically homogeneous and isotropic. These solutions are shown to be in good agreement with results of experiments and direct numerical simulations of the Navier-Stokes equation. Subsequently, are presented the system solutions as a shear is applied to the flow.

The second part is devoted to the study of the transition to spatiotemporal chaos through intermittency in a real hydrodynamic system. First this transition is studied quantitatively, then a spatiotemporal intermittency model is applied to the experiment boundary conditions. As the real system, the solutions of this model present, for certain values of the parameters it depends on, a bistability regime near threshold between spatiotemporal intermittency and a regime in which disorder arises on the boundaries only.

**Key words :** Hydrodynamic turbulence, Lagrangian approach, Stochastic model, Semiclassical approximation, Shear turbulence, Spatiotemporal intermittency, Transition to spatiotemporal chaos, Coupled map lattices, Rayleigh-Taylor instability

---

**Discipline :** Physique

---

Université de Nice-Sophia Antipolis  
Institut Non Linéaire de Nice — UMR 6618 CNRS  
1361, route des Lucioles 06560 Valbonne, France

